

熊飞麟,周毓荃. 2016. 估算雨滴谱  $\Gamma$  分布三参数的阶矩法研究. 气象, 42(7):777-789.

# 估算雨滴谱 $\Gamma$ 分布三参数的阶矩法研究<sup>\*</sup>

熊飞麟<sup>1</sup> 周毓荃<sup>1,2</sup>

1 南京信息工程大学, 南京 210044

2 中国气象科学研究院, 北京 100081

**提 要:** 利用 2014 年 8 月 4—23 日山西忻州 OTT-Parsivel 二代激光雨滴谱仪获得的雨滴谱资料, 研究了估算雨滴谱  $\Gamma$  分布三参数的阶矩法。把降水云分为层状云、积状云、积层混合云三种, 采用最小二乘法 and 阶矩法估算雨滴谱, 并在现有阶矩法的研究上, 提出一种新矩量组合 M036 与其他矩量一起分 1 min、5 min 平均和 5 min 滑动平均估算雨滴谱样本的均方根误差和误差谱分布, 并进行比较, 同时研究了不同降水云雨滴谱三参数随雨强  $R$  的变化关系。结果表明: 阶矩法估算  $\Gamma$  分布雨滴谱, M036 矩量组合代表雨滴数浓度、液态水含量和雷达反射率因子, 三个物理量计算方便, 物理意义清晰, 实际应用中如能通过探测手段获得三个矩量, 就能反演得到云中雨滴谱。阶矩法中 M036 估算最好; 估算三种不同时间雨滴谱样本的均方根误差平均值, M036 误差最小; 分析三种不同时间雨滴谱样本的均方根误差谱分布, M036 谱宽最窄, 误差集中; 估算三种降水云雨滴谱三参数随雨强  $R$  的增大而减少; 拟合雨滴谱  $\Gamma$  分布三参数  $N_0$ 、 $\mu$ 、 $\lambda$  满足二项式分布且相关系数较好。

**关键词:** 雨滴谱,  $\Gamma$  分布, 三参数, 阶矩法

**中图分类号:** P412, P401

**文献标志码:** A

**doi:** 10.7519/j.issn.1000-0526.2016.07.001

## Study of Moment Methods in Estimating Three Parameters of Gamma Raindrop Size Distribution

XIONG Feilin<sup>1</sup> ZHOU Yuquan<sup>1,2</sup>

1 Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044

2 Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081

**Abstract:** Using the rain drop size distribution (DSD) data obtained from OTT-Parsivel-II laser optical disdrometer in 4–23 August 2014 in Xinzhou, Shanxi Province, the moments method for estimating Gamma DSD parameters is studied in this paper. The precipitation clouds are divided into three categories: stratiform, cumuliform and stratiform mixed with cumuliform. Comparing the observed and estimated DSD data in 1 min, 5 min average and moving 5 min average, root mean square error (RMSE) and error distribution of DSD are computed with the method of least square and moments. A new method of moments is put forward involving M0, M3 and M6 which respectively represent the moments of raindrop number concentration, liquid water content and radar reflectivity. The analysis shows that using moments to estimate rain DSD, the M036 (M0, M3 and M6) is the best among the moment methods because the averaged RMSE in 1 min, 5 min average and moving 5 min average is minimum and the error distribution is concentrated. The parameters of DSD estimated from three-kind precipitation clouds decrease with the increase of rainfall intensity  $R$ . The fitting DSD parameters ( $N_0$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ) satisfy binomial distribution and their correlation coefficient is good.

\* 国家重大科学研究计划(2013CB955802)和公益性行业(气象)科研专项(GYHY201206025)共同资助

2015 年 9 月 29 日收稿; 2016 年 1 月 9 日收修定稿

第一作者: 熊飞麟, 主要从事大气物理和大气环境方向研究. Email: xiong\_felin@163.com

通信作者: 周毓荃, 主要从事云降水物理和人工影响天气研究. Email: zhouyq05@163.com

**Key words:** rain drop size distribution (DSD), Gamma distribution, three parameters, moment methods

## 引 言

降水是云中降落到地表液态或固态的水的总称,其中降雨是云中水汽在动力热力条件下通过宏观和微观物理过程形成并降落到地面的液态降水,地面雨滴谱的特性一定程度上反映了降水云成雨的过程,对于雨滴谱特性的研究是云降水物理学中重要的内容之一,在气象等相关科学领域有十分重要的应用价值。通过对雨滴谱分布参数的研究,可以计算数浓度、降雨强度、含水量和雷达反射率因子等物理参量,可为模式参数化方案和雷达、卫星反演降水提供依据(Atlas et al, 1973; Ulbrich et al, 1983; 1998; Tokay et al, 1996; 2001; Caracciolo et al, 2006; 周毓荃等, 2001; 郑娇恒等, 2007; Cao et al, 2009; 罗俊颀等, 2012; 胡子浩等, 2014; 孙晶等, 2015; 周黎明等, 2015; 陈磊等, 2013; 赵震等, 2005; 明虎等, 2014; 石爱丽等, 2004; 汪学渊等, 2016)。雨滴谱  $\Gamma$  分布最早是由(Ulbrich et al, 1983)提出,其表达式为:

$$N(D) = N_0 D^\mu \exp(-\lambda D) \quad (1)$$

式中,  $N(D)$  是单位尺度间隔下单位体积雨滴数,单位是:  $\text{个} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{mm}^{-1}$ ,  $D$  是雨滴等效体积直径,单位为:  $\text{mm}$ ,  $N_0$  (单位:  $\text{mm}^{-1-\mu} \cdot \text{m}^{-3}$ ) 为数浓度参数,  $\lambda$  (单位:  $\text{mm}^{-1}$ ) 为斜率因子,  $\mu$  为分布形状因子,当  $\mu > 0$  时曲线在小滴段随直径减小向上弯曲,  $\mu < 0$  曲线在小滴段随直径减小向下弯曲,当  $\mu = 0$  时,即负指数分布函数。

国内外的专家学者对雨滴谱做了大量观测和研究,研究表明,  $\Gamma$  分布通过调节各参数来表达不同的雨滴谱情况,和指数分布相比,  $\Gamma$  分布估算代表性更好。用实测雨滴谱资料估算某种数学分布时一般采用最小二乘法,最小二乘法估算的均方根误差最小,估算最优,但实际观测和模式中的物理量和谱分布参数有关,需要研究矩量和参数的关系。而阶矩法采用实测雨滴谱的矩量来计算反推数学分布的参数,估算  $\Gamma$  分布雨滴谱用的三个矩量都有物理意义(如 0 阶表示雨滴数浓度, 3 阶代表液态水含量, 4 阶代表雨强, 6 阶表示雷达反射率因子等),通过遥感手段测到云中三个矩量,就可以反演云中的雨滴谱,因此具有研究意义。Tokay 等(1996)使用 M346

(M 代表“Moments”)矩量估算参数,对比了 JWD 和 2DVD 雨滴谱在  $\Gamma$  分布下的差异,平均后两者估算一致,说明指数和  $\Gamma$  分布的参数与测量仪器无关。Ulbrich 等(1998)使用 M346 矩量估算三参数,得出时空配置过小造成 DSD(drop size distribution)三参数产生相当大的起伏。郑娇恒等(2007)认为实际降水过程是起伏变化的,使用低阶或高阶矩量虽能改善某一个量的估算精度但稳定性降低,文章认为 M234 矩量估算更好。Cao 等(2009)对比了 M012、M234、M456、M246、M346 阶矩的误差,认为选取 M234 矩量估算误差最小。前人使用阶矩法估算,较少全采用低阶(高阶)矩量,防止造成估算不稳定,但低阶(高阶)二选一的矩量组合却造成高阶(低阶)量的估算精度降低。

利用 2014 年 8 月 4—23 日山西忻州 OTT-Parsivel 二代激光雨滴谱仪获得的雨滴谱资料,把降水云分为层状云、积状云、积层混合云三种,采用最小二乘法和阶矩法估算雨滴谱,并在现有阶矩法的研究上,提出一种新矩量组合 M036,即雨滴数浓度、液态水含量、雷达反射率因子三个物理量,考虑高中低三种矩量的精度,并从估算每条雨滴谱的均方根误差和误差谱分布与其他矩量估算进行比较。同时研究了不同降水云雨滴谱三参数随雨强  $R$  的变化关系。

## 1 观测仪器、数据预处理和估算方法

### 1.1 Parsivel 激光雨滴谱仪和数据预处理

本文采用 OTT-Parsivel 二代激光雨滴谱仪 2014 年 8 月 4—23 日山西忻州获得的雨滴谱资料进行雨滴谱估算方法的研究。Parsivel 二代激光雨滴谱仪是一种光学测量仪。其测量原理是:仪器光学传感器组成二维光阵发射并测量激光,由接收端接收后转化成电信号。仪器设计时考虑到雨滴下落形变并对进行了处理,相比第一代 Parsivel 激光雨滴谱仪,雨滴下落形变误差减小,测量精度提高。Parsivel 中心采样面积为  $54 \text{ cm}^2$ ,测量粒子最大尺度为  $25 \text{ mm}$ ,最大下落末速为  $20.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,依据非等间隔将尺度-速度通道分为  $32 \times 32$  档共计 1024 档,实际测量粒子尺度从  $0.3125 \sim 25 \text{ mm}$ ,粒子下

落速度从  $0.25 \sim 20.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。取样时间可设定为  $10 \sim 60 \text{ s}$ 。

观测取样时间为  $60 \text{ s}$ ，剔除采样时间内雨滴个数不足 10 个的样本，共获得 1537 条雨滴谱。雨滴谱仪按照一个速度通道对应 32 个粒子尺度通道记录粒子个数。由于落速测量有一定误差，较小粒子段更为显著，故以粒子尺度为标准，将各尺度通道内不同落速的粒子相加，各尺度通道粒子个数累加后除以面积再除以间隔直径，得到平面谱  $n$  (单位:  $\text{个} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{mm}^{-1}$ )，将平面谱  $n$  除以各尺度档对应雨滴下落末速度理论值  $V$ ，再乘以采样时间  $60 \text{ s}$ ，得到空间上雨滴数浓度即雨滴谱  $N$  (单位:  $\text{个} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{mm}^{-1}$ )。这里采用 Atlas 等(1973)估算标准大气压  $p_0 = 1013 \text{ hPa}$  雨滴下落末速的公式

$$V = \begin{cases} 0, & D < 0.03 \text{ mm} \\ 4.323(D - 0.03), & 0.03 \text{ mm} < D \leq 0.6 \text{ mm} \\ 9.65 - 10.3e^{-0.6D}, & D > 0.6 \text{ mm} \end{cases} \quad (2)$$

计算雨强  $I$  (单位:  $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$ )

$$I = 60 \times \frac{\pi}{6} \sum_{i=1}^{32} n_i D_i^3 \Delta D_i \quad (3)$$

计算雷达反射率因子  $Z$  (单位:  $\text{mm}^6 \cdot \text{m}^{-3}$ )

$$Z = \sum_{i=1}^{32} N D_i^6 \Delta D_i \quad (4)$$

## 1.2 估算方法

雨滴谱的估算通常有最小二乘法和阶矩法两类，其主要方案及误差分别如下

### 1.2.1 最小二乘法估算

对观测雨滴谱

$$N(D_i) \quad i = 1, k \quad (5)$$

估算雨滴谱

$$N'(D_i) = N_0 D_i^\mu e^{-\lambda D_i} \quad (6)$$

按最小二乘法，两者误差

$$\epsilon = \sum_{i=1}^k [N(D_i) - N'(D_i)]^2 \rightarrow \min \quad (7)$$

由于雨滴谱中，小粒子浓度比大粒子的大几个数量级，所以直接用代入雨滴谱只能反映小粒子的权重误差，大粒子不起作用，为能反映雨滴谱估算误差，应用数浓度的对数代入，设  $X_1 = \ln(N_0)$ ， $X_2 = \mu$ ， $X_3 = \lambda$ ，化简得

$$\epsilon = \sum_{i=1}^k \{ \ln[N(D_i)] - X_1 - X_2 \ln(D_i) + X_3 D_i \}^2 \quad (8)$$

分别令  $X_1, X_2, X_3$  的偏微分为 0，有

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial X_1} = \sum_{i=1}^k 2 \{ \ln[N_i(D)] - X_1 - X_2 \ln(D_i) + X_3 D_i \} (-1) = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial X_2} = \sum_{i=1}^k 2 \{ \ln[N_i(D)] - X_1 - X_2 \ln(D_i) + X_3 D_i \} [-\ln(D_i)] = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial X_3} = \sum_{i=1}^k 2 \{ \ln[N_i(D)] - X_1 - X_2 \ln(D_i) + X_3 D_i \} (D_i) = 0 \quad (9)$$

从上述方程中解出  $X_1, X_2, X_3$ 。

实测雨滴谱为  $N(D)$ ，设估算雨滴谱  $N'(D)$  为  $\Gamma$  分布，两者各通道取对数后数浓度相减，平方后求和，其期望最小值即满足最小二乘法。分别对估算雨滴谱  $N'(D)$  中三参数偏微分并令为 0，三个方程三个未知数可解得估算雨滴谱  $N'(D)$ 。

### 1.2.2 阶矩法估算

对  $\Gamma$  分布雨滴谱式(1)来说，定义  $x$  阶矩量为

$$M_x = \int_0^\infty N(D) D^x dD \quad (10)$$

积分后得

$$M_x = N_0 \frac{\Gamma(x + \mu + 1)}{\lambda^{x + \mu + 1}} \quad (11)$$

在  $\Gamma$  分布中每个矩量由三个分布参数决定，所以求  $\Gamma$  分布三个参数需要三个矩量，常称阶数 0、1 为低阶，2、3、4 为中阶，5、6 为高阶。

对实际雨滴谱资料， $x$  阶矩量为

$$M_x = \sum_{i=1}^{32} N(D) D_i^x \Delta D_i \quad (12)$$

用可选的三个矩量 ( $M_{x1}, M_{x2}, M_{x3}$ ) 计算谱分布中的三个参数可用消元法，如下所示

$$\begin{aligned} \frac{M_{x1}}{M_{x2}} &= \lambda^{(x2-x1)} \frac{\Gamma(x1 + \mu + 1)}{\Gamma(x2 + \mu + 1)} \\ \frac{M_{x1}}{M_{x3}} &= \lambda^{(x3-x1)} \frac{\Gamma(x1 + \mu + 1)}{\Gamma(x3 + \mu + 1)} \end{aligned} \quad (13)$$

对上式两个方程同时取对数，化简解得  $\mu$ ，进而推导出其余两参数。

这里对 M036 来说，三个矩量分别为

$$M_0 = \int_0^\infty N(D) D^0 dD \quad (14)$$

$$M_3 = \int_0^\infty N(D) D^3 dD \quad (15)$$

$$M_6 = \int_0^\infty N(D) D^6 dD \quad (16)$$

令

$$F = \frac{M_3^2}{M_0 M_6} \quad (17)$$

由式(13)化简得

$$(F-1)\mu^3 + (15F-6)\mu^2 + (74F-11)\mu + (120F-6) = 0 \quad (18)$$

令

$$a = 1, b = \frac{15F-6}{F-1} / 3a, \\ c = \frac{74F-11}{F-1} / 6a, d = \frac{120F-6}{F-1} / 2a \quad (19)$$

化简式(18),根据一元三次方程解法知

$$\alpha = -b^3 + 3bc - d, \beta = b^2 - 2c, \Delta = \alpha^2 - \beta^3 \quad (20)$$

$$R_1 = \sqrt[3]{\alpha + \sqrt{\Delta}}, R_2 = \sqrt[3]{\alpha - \sqrt{\Delta}} \quad (21)$$

方程有一实根  $\mu$

$$\mu = -b + R_1 + R_2 \quad (22)$$

则其余两参数为:

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{M_0}{M_3}(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)} \\ N_0 = \frac{\lambda^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)} M_0 \quad (23)$$

新矩量组合 M036 三参量代表雨滴数浓度、液态水含量和雷达反射率因子等三个物理量,三个矩量计算方便且都有物理意义,实际应用中如能通过探测手段获得三个矩量,就能反演得到云中雨滴谱。

### 1.2.3 误差计算

对于估算前后雨滴谱分布的均方根误差,计算公式为:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - u_i)^2} \quad (24)$$

式中,  $y_i$  为各通道估算三参数后计算得雨滴谱的

$\ln N'(D_i)$ ,  $u_i$  为各通道实测雨滴谱的  $\ln N(D_i)$ ,  $N$  为雨滴谱所占通道数 ( $N \leq 32$ )。

对于估算前后矩量的均方根误差,计算公式为:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{I} \sum \left( \frac{M_O}{M_S} - 1 \right)^2} \quad (25)$$

式中,  $M_O$  为实测雨滴谱计算的 0~6 阶矩量,  $M_S$  为拟合得三参数后计算的 0~6 阶矩量,  $I=7$ 。

## 2 资料概况与降水分类

### 2.1 三种降水云的划分

分析 2014 年 8 月在忻州观测到 10 d 有降水共计 1537 份雨滴谱资料,在天气学云的定义基础上,从雷达回波特征和雨强划分,将降水分为积状降水云、层状降水云和积层混合降水云。关于降水云的划分有许多方法(张培昌等,2001;盛裴轩等,2003;张文煜等,2007;Chen et al, 2013),本文采用当天经过忻州地区的整体雷达回波块结合雨强划分降水类型,主要依照太原 C 波段雷达将雨滴谱仪记录到降水的云状进行分类,雷达反射率因子  $Z > 38$  dBz 则为对流云,  $Z < 38$  dBz 则为层状云,若回波中夹有团块,似棉花絮,强度 40 dBz 以上则为积层混合云。其次再依据 Chen 等(2013)提出降水时段中最大雨强  $R_{\max}$  及其前后 5 个样本的雨强标准差  $\sigma$  的判据,  $R_{\max} \geq 0.5 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$  且  $\sigma \leq 1.5 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$  为层状降水云,  $R_{\max} \geq 5 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$  且  $\sigma > 1.5 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$  为对流降水云这一判据,选择一天中最大雨强和其前后 5 个样本,按标准差将降水云划分积状降水云和层状降水云。表中降水持续时间是指整个过程的持续时间,如表 1 所示。

表 1 三种降水云类型划分

Table 1 The division of three-kind of precipitation clouds

观测日期/年.月.日	降水持续时间	样本数(总计:1537)	$\bar{R}/\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$	$Z_{\max}/\text{dBz}$	划分依据 $R_{\max}/\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$	$\sigma/\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$	降水类型划分
2014.8.4	10:57—15:22	152	0.25	25	1.18	0.14	层状云
2014.8.5	01:58—04:05	125	0.88	30	3.20	0.41	层状云
2014.8.6	09:09—15:32	341	0.76	35	3.08	0.36	层状云
2014.8.22	05:15—10:26	247	0.39	30	2.53	0.38	层状云
2014.8.12—13	22:22—02:04	209	4.36	45	37.73	6.08	积状云
2014.8.13	13:02—14:45	104	6.76	55	63.93	7.69	积状云
2014.8.15	16:46—17:19	31	1.26	40	3.14	0.50	积状云
2014.8.21	17:28—19:13	93	6.73	55	81.18	14.74	积状云
2014.8.17	22:16—23:52	94	1.13	50	4.21	0.41	积层混合云
2014.8.23	14:46—18:53	141	0.73	55	4.22	0.44	积层混合云

如表 1 所示,层状降水云持续时间较长,积层混合云次之,积状云较短;层状云  $Z_{\max}$  最大不超过 38 dBz,而积状云  $Z_{\max}$  都超过 38 dBz。层状云  $R_{\max} > 0.5 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$ ,其标准差  $< 1.5 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$ ;积状云  $R_{\max} > 5 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$ ,其标准差  $> 1.5 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$ ,其中 2014 年 8 月 15 日当天雷达回波显示是积状云,但雨滴谱仪测得  $R_{\max} < 5 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$ ,由于当天积云单体水平尺度小,雨滴谱仪是单点观测,有可能积云块没观测点,雨滴谱未观测到最大雨强。由此可见,按照 Chen 等(2013)雨强划分层状云和积状降水云类型是合理。考虑到积层混合云不易用雨强划分,这里还是按照雷达气象学上的回波结构和强度进行划分。

## 2.2 三种降水云雨滴谱微物理量平均值

按照上面的分类,计算给出了层状云、积状云、积层混合云三种降水云的微物理参量,分别是平均直径、平均体积直径、众数直径、有效半径、最大直径、数密度、平均雨强 ( $R$ )、平均雷达反射率因子

( $Z$ ),具体见表 2。可以看出,对雨滴的平均直径来说:层状云  $< 1 \text{ mm}$ ,积状云  $> 1 \text{ mm}$ ,积层混合云介于  $1 \text{ mm}$  之间;从雨滴的平均体积直径上看:积状云  $>$  积层混合云  $>$  层状云;对于雨滴的有效半径  $[r_e = \int_0^\infty r^3 n(r) dr / \int_0^\infty r^2 n(r) dr]$ :层状云  $<$  积层混合云  $<$  积状云;从雨滴最大直径上看:积状云  $>$  积层混合云  $>$  层状云;对比三者雨滴数密度:积状云  $>$  层状云  $>$  积层混合云; $R$  值和  $Z$  值也是积状云  $>$  积层混合云  $>$  层状云。

## 2.3 三种降水云平均降水粒子谱分布

将 8 月 4、5、6、22 日层状云雨滴谱累加平均得到所有层状云观测雨滴谱,同理将 8 月 12—13、13、15、21 日积状云降水粒子谱累加平均,将 8 月 17、23 日积层混合云雨滴谱累加平均,绘制平均雨滴谱分布图(图 1)。从图 1 可知,积状云谱宽最宽,层状云谱宽最窄,积层混合云较窄;积状云数密度最大,层状云  $>$  积层混合云;对小滴 ( $D < 1 \text{ mm}$ ) 数密度来说,积状云  $>$  层状云  $>$  积层混合云。

表 2 三种降水云雨滴谱微物理特征量

Table 2 Micro-physical characteristics of three-kind precipitation clouds

降水云类型	平均直径 /mm	平均体积 直径/mm	众数直径 /mm	有效半径 /mm	最大直径 /mm	数密度 /个 $\cdot \text{m}^{-3}$	$R/\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$	$Z/\text{dBz}$
层状云	0.78~0.95	0.87~1.13	0.56~0.69	0.44~0.59	3.25~4.25	575.63~1250.73	0.25~0.88	13.87~22.8
积状云	1.05~1.18	1.39~1.70	0.44~0.69	0.76~1.02	7.5~9.5	383.51~2001.66	1.26~6.76	25.62~29.83
积层混合云	0.98~1.14	1.24~1.38	0.44~0.81	0.66~0.73	4.25~4.75	293.54~764.36	0.73~1.13	22.45~25.4

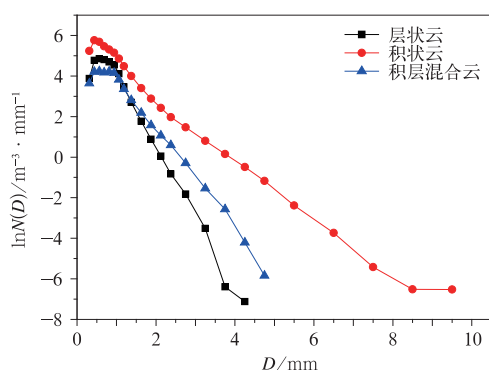


图 1 三种降水云总体平均降水粒子谱分布

Fig. 1 Averaged raindrop size distributions of three-kind precipitation clouds

## 3 不同阶矩法估算均方根误差分析

为提高样本精度,对 1 min 雨滴谱样本按每次

降水过程进行 5 min 平均和 5 min 滑动平均,研究了 M012、M234、M456、M246、M346 和 M036 不同阶矩法估算的均方根误差,其中, M036 估算三种雨滴谱样本表现最好。同时对不同估算方法估算 0~6 矩量的均方根误差进行了研究, M036 估算三种雨滴谱各矩量的误差最小,优于最小二乘法,可见最小二乘法并不是普适的,这与估算选取的标准有关。

### 3.1 估算 1 min 样本的均方根误差

采用最小二乘法和阶矩法研究 1 min 样本的均方根误差。对 1 min 雨滴谱样本求均方根误差,并取平均值。由表 3 知,最小二乘法估算 1 min 样本的均方根误差的平均值最小;使用阶矩法估算时,对于三种降水云 1 min 雨滴谱, M036 估算均方根误差的平均值最小,其次为 M234、M246、M012、M346, M456 误差最大。

表 3 实测谱与估算谱的均方根误差平均值(1 min)

降水云类型	最小二乘法	M012	M234	M456	M246	M346	M036
层状云	0.35	0.56	0.50	0.65	0.52	0.56	0.46
积状云	0.39	0.72	0.53	1.09	0.64	0.78	0.49
积层混合云	0.34	0.50	0.47	0.84	0.53	0.61	0.43

下面给出阶矩法估算每分钟雨滴谱样本的均方根误差累积频谱图,同时给出最小二乘法作为对照。统计三种降水云 1 min 实测谱与估算谱的均方根误差谱分布,给出雨滴谱的均方根误差分布情况及各区间误差所占百分比,判断不同阶矩法估算的优劣。

由图 2 知,最小二乘法估算的均方根误差谱,其谱宽最窄,99%的误差集中在 1 以内,近似正态分布。而实际观测和模式中的物理量和谱分布参数有关,需要研究矩量和参数的关系,这里给出最小二乘法估算误差主要是为了和阶矩法估算误差进行对比。

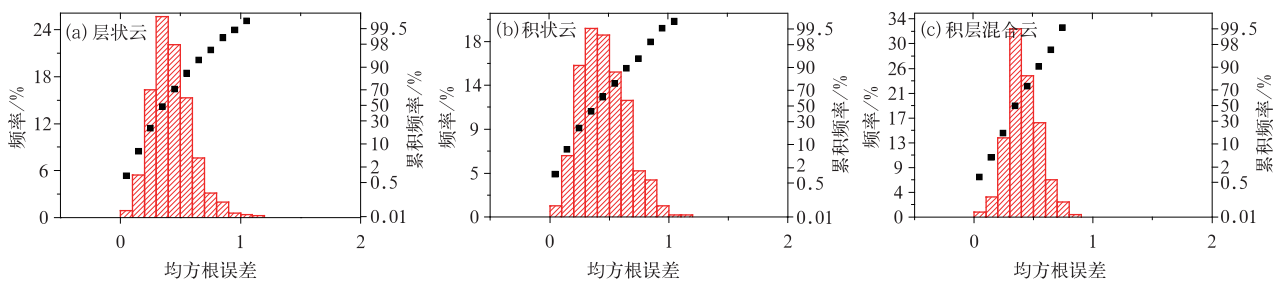


图 2 最小二乘法估算 1 min 样本的均方根误差频谱分布

Fig. 2 RMSE distribution of three-kind precipitation clouds with the method of least squares in 1 min rain DSD

图 3 是阶矩法估算 1 min 样本的均方根误差频谱分布,由图 3 知,层状云误差谱分布的谱宽, M036 谱宽最窄,其次为 M012、M234、M246、M346、M456;从均方根误差谱分布集中在 1 以内趋势来看, M036 估算误差最集中,其次为 M012、M234、M246、M346、M456。从均方根误差在 0.5 处所占百分比来看, M036 占比最大,其次为 M234、M012、M246、M346、M456。积状云误差谱分布的谱宽, M234 最窄,其次为 M012、M036、M246、M346、M456;从均方根误差谱分布集中在 1 以内趋势来看, M036 和 M012 估算误差 90% 以上集中在 1 以内,其余矩量组合都在 80% 以下;从均方根误差在 0.5 处所占百分比来看, M036 占比最大,其次为 M234、M012、M246、M346、M456。积层混合云误差谱分布的谱宽, M036 谱宽最窄,其次为 M012、M234、M246、M346、M456;从均方根误差谱分布集中在 1 以内趋势来看, M036 估算误差最集中,其次 M012、M234、M246、M346、M456;从均方根误差在 0.5 处所占百分比来看, M036 占比最大,其次为

M012、M234、M246、M346、M456。

由上可知,对积状云(由图 1 知),虽然大滴直径远大于其他两种降水云,但所占数浓度小,而小滴数浓度大,所以 M036 和 M012 估算效果好,对层状云和积层混合云, M036 估算效果最好,总的来说, M036 估算估算效果好。

### 3.2 估算 5 min 平均样本的均方根误差

对每天采样雨滴谱样本按 5 min 平均,求平均后的均方根误差并取其平均值。由表 4 知,最小二乘法估算 5 min 平均样本的均方根误差的平均值最小;使用阶矩法估算时,对于三种降水云每分钟雨滴谱, M036 估算均方根误差的平均值最小,其次为 M234、M246、M012、M346、M456 误差最大。

下面给出阶矩法估算 5 min 平均雨滴谱样本的均方根误差累积频谱图,同时给出最小二乘法作为对照。由图 4 知,最小二乘法估算的均方根误差谱,其谱宽最窄,三类型降水云的误差都集中在 1 以内。

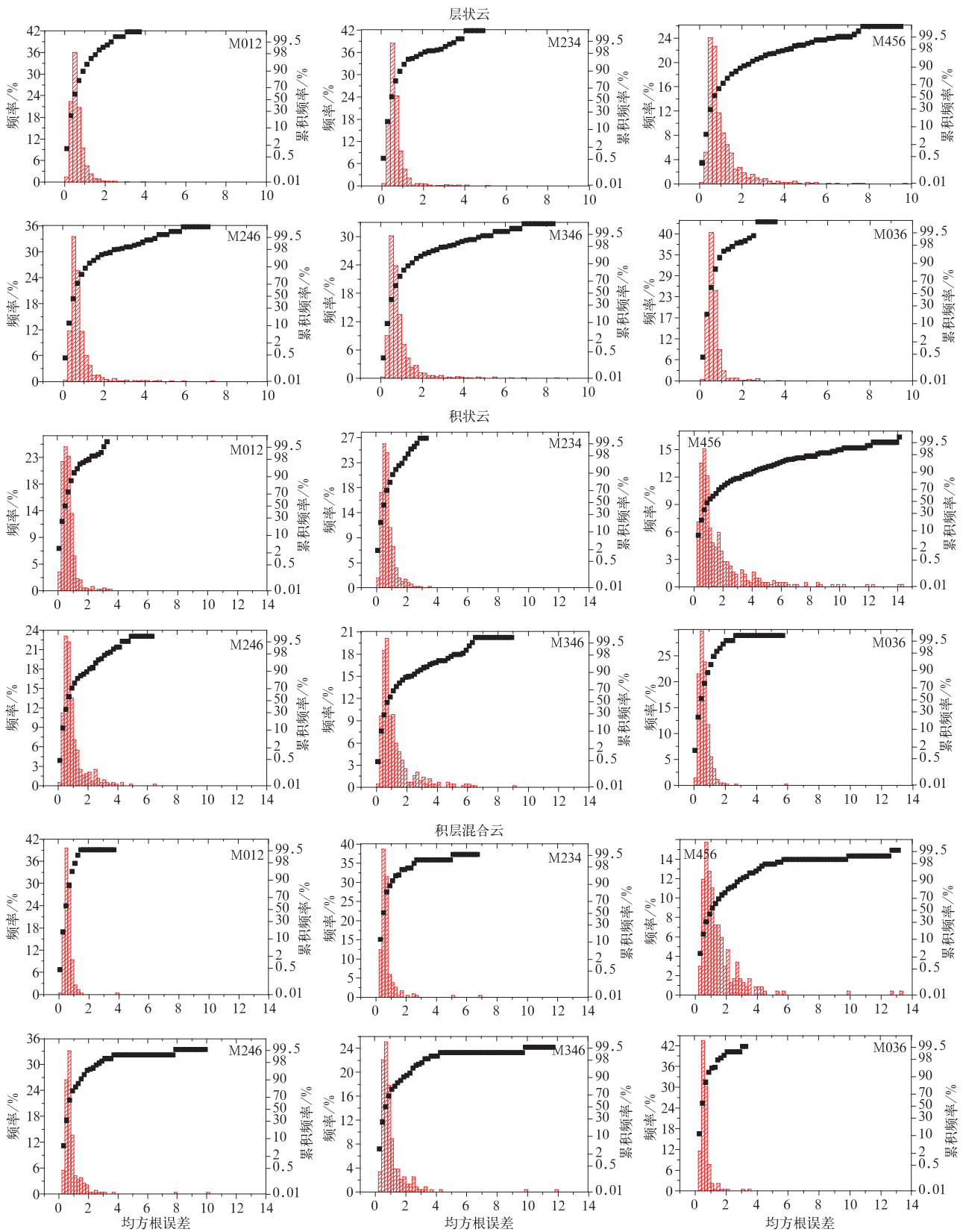


图 3 阶矩法估算 1 min 样本的均方根误差频谱分布

Fig. 3 RMSE distribution of three-kind precipitation clouds with the method of moments in 1 min rain DSD

表 4 实测谱与估算谱的均方根误差平均值(5 min 平均)

降水云类型	最小二乘法	M012	M234	M456	M246	M346	M036
层状云	0.35	0.56	0.50	0.65	0.53	0.57	0.45
积状云	0.40	0.69	0.53	1.06	0.64	0.78	0.49
积层混合云	0.35	0.51	0.45	0.79	0.50	0.57	0.43

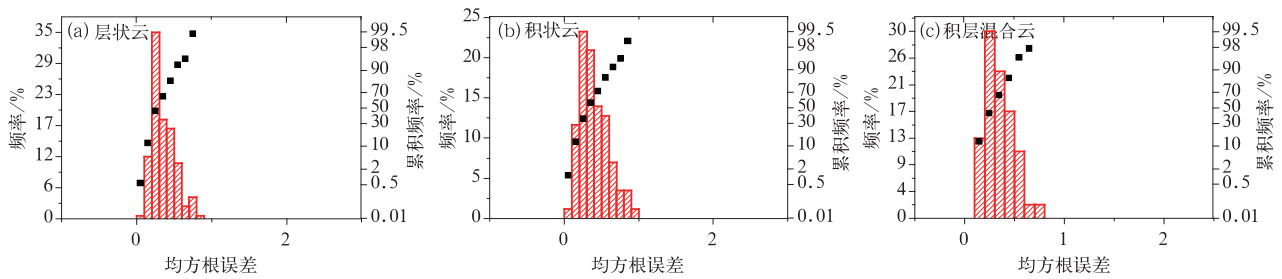


图 4 同图 2, 但为 5 min 平均样本

Fig. 4 Same as Fig. 2, but for 5 min average rain DSD

图 5 是阶矩法估算 5 min 平均样本的均方根误差频谱分布, 由图 5 知, 层状云误差谱分布的谱宽, M036 谱宽最窄, 其次为 M234、M012、M246、M346、M456; 从均方根误差谱分布集中在 1 以内趋势来看, M036 估算误差最集中, 其次为 M234、M246、M346、M456、M012; 从均方根误差在 0.5 处所占百分比来看, M036 占比最大, 其次为 M234、M012、M246、M346、M456。积状云误差谱分布的谱宽, M036 最窄, 其次为 M234、M246、M012、M346、M456; 从均方根误差谱分布集中在 1 以内趋势来看, M036 估算误差最集中, 其次为 M234、M246、M012、M346、M456; 从均方根误差在 0.5 处所占百分比来看, M036 占比最大, 其次为 M234、M012、M246、M346、M456。积层混合云误差谱分布的谱宽, M246 谱宽最窄, 其次为 M036、M346、M234、M012、M456; 从均方根误差谱分布集中在 1 以内趋势来看, M036 估算误差最集中, 其次 M234、M246、M012、M346、M456; 从均方根误差在 0.5 处所占百分比来看, M036 占比最大, 其次为 M246、M346、M234、M012、M456。

由上可知, 对层状云和积状云, M036 估算效果最好, 对积层混合云, M246 谱宽最窄, 因为积层混合云中(由图 1 知), 小滴数浓度较小, 而雨滴最大直径介于层状云和积状云之间, 所以照顾到高阶的 M246 谱宽小于照顾到低阶的 M036, 总的来说, M036 估算最优。

### 3.3 估算 5 min 滑动平均的均方根误差

对每天采样雨滴谱样本按 5 min 取滑动平均, 求滑平后的均方根误差并取其平均值。由表 5 知, 最小二乘法估算 5 min 滑平样本的均方根误差的平均值最小; 使用阶矩法估算时, 对于三种降水云每分钟雨滴谱, M036 估算均方根误差的平均值最小, 其次为 M234、M246、M012、M346、M456 误差最大。

下面给出阶矩法估算 5 min 滑平雨滴谱样本的均方根误差累积频谱图, 同时给出最小二乘法作为对照。由图 6 知, 最小二乘法估算的均方根误差谱, 其谱宽最窄, 三种类型降水云的误差都集中在 1 以内。

图 7 是阶矩法估算 5 min 平均样本的均方根误差频谱分布, 由图 7 知, 层状云误差谱分布的谱宽, M036 谱宽最窄, 其次为 M012、M234、M246、M346、M456; 从均方根误差谱分布集中在 1 以内趋势来看, M036 估算误差最集中, 其次为 M234、M246、M346、M456、M012; 从均方根误差在 0.5 处所占百分比来看, M036 占比最大, 其次为 M234、M012、M246、M346、M456。积状云误差谱分布的谱宽, M036 最窄, 其次为 M234、M246、M346、M012、M456; 从均方根误差谱分布集中在 1 以内趋势来看, M036 估算误差最集中, 其次为 M234、M246、M346、M012、M456; 从均方根误差在 0.5 处所占百分比来看, M036 占比最大, 其次为 M234、



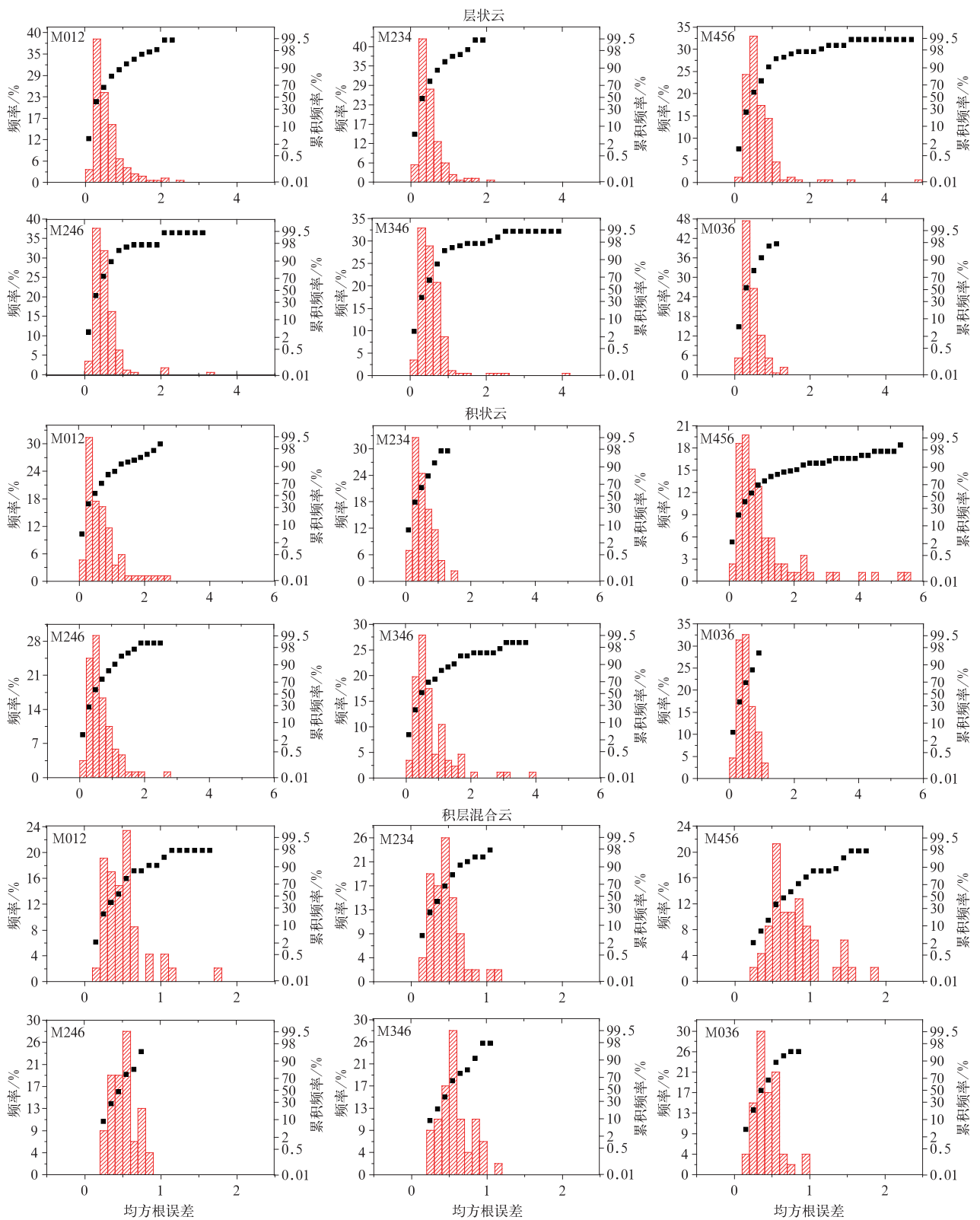


图 5 同图 3, 但为 5 min 平均样本

Fig. 5 Same as Fig. 3, but for 5 min average rain DSD

M012、M246、M346、M456。积层混合云误差谱分布的谱宽，M036 谱宽最窄，其次为 M234、M246、M346、M012、M456；从均方根误差谱分布集中在 1 以内趋势来看，M036 估算误差最集中，其次 M234、

表 5 实测谱与估算谱的均方根误差平均值(5 min 滑动平均)

降水云类型	最小二乘法	M012	M234	M456	M246	M346	M036
层状云	0.36	0.56	0.50	0.65	0.52	0.56	0.45
积状云	0.40	0.72	0.53	1.05	0.62	0.76	0.49
积层混合云	0.35	0.49	0.45	0.81	0.52	0.59	0.43

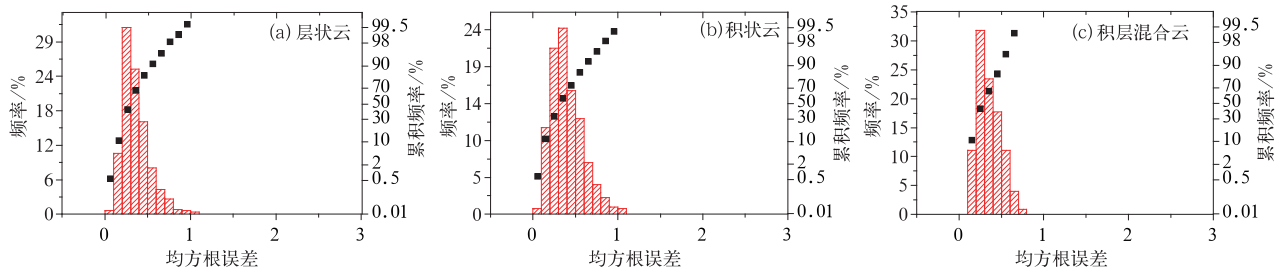


图 6 同图 2, 但为 5 min 滑动平均样本

Fig. 6 Same as Fig. 2, but for 5 min moving average rain DSD

M012、M246、M346、M456;从均方根误差在 0.5 处所占百分比来看, M036 占比最大, 其次为 M234、M246、M346、M012、M456。

由上可知, 对 5 min 滑动平均的雨滴谱样本, M036 估算三种降水云效果好。

### 3.4 估算各矩量的均方根误差

对实测谱的矩量和估算后的矩量, 由式(25)计算均方根误差并取其平均值。估算矩量误差越小, 代表该估算的谱分布计算的物理量更接近实测值, 代表性更好。由表 6 知, 对于三种降水云估算矩量的均方根误差, M036 估算误差小于最小二乘法, 估算最优。

## 4 雨滴谱 $\Gamma$ 分布三参数

### 4.1 雨滴谱 $\Gamma$ 分布三参数和雨强 $R$ 的关系

Tokay 等(1996)研究认为, 雨滴谱三参数  $N_0$ 、 $\mu$ 、 $\lambda$  随雨强的增大而增大; 但 Caracciolo 等(2006)认为雨滴谱三参数  $N_0$ 、 $\mu$ 、 $\lambda$  随雨强的增大而减少。这反映不同地区不同降水类型, 雨滴谱参数变化存在差异, 就本文资料而言, 三种降水云 1 min 雨滴谱三参数随雨强  $R$  的变化如图 8 所示, 由图可知,  $\Gamma$  分布雨滴谱三参数  $N_0$ 、 $\mu$ 、 $\lambda$  随雨强的增大而减少。

表 6 实测矩量和估算矩量的均方根误差平均值

云降水类型	最小二乘法	M012	M234	M456	M246	M346	M036
层状云	0.096	0.210	0.069	0.281	0.122	0.184	0.034
积状云	0.295	1.213	0.316	0.403	0.378	0.424	0.126
积层混合云	0.054	0.298	0.093	0.110	0.118	0.143	0.036

### 4.2 雨滴谱 $\Gamma$ 分布三参数间相互关系

$\Gamma$  分布雨滴谱三参数  $N_0$ 、 $\mu$ 、 $\lambda$  相互独立, 但三者之间存在一定关系。Zhang 等(2010)认为  $\mu-\lambda$  之间存在很好的二项式关系, 本文同样使用二项式

估算  $\Gamma$  分布 1 min 雨滴谱样本三参数间的关系, 如表 6 所示(图略), 层状云和积状云  $N_0-\mu$  与  $N_0-\lambda$  二阶系数符号相反, 但积层混合云两者相同; 积状云和积层混合云  $\mu-\lambda$  二阶系数符号相同, 但层状云二阶系数相反。

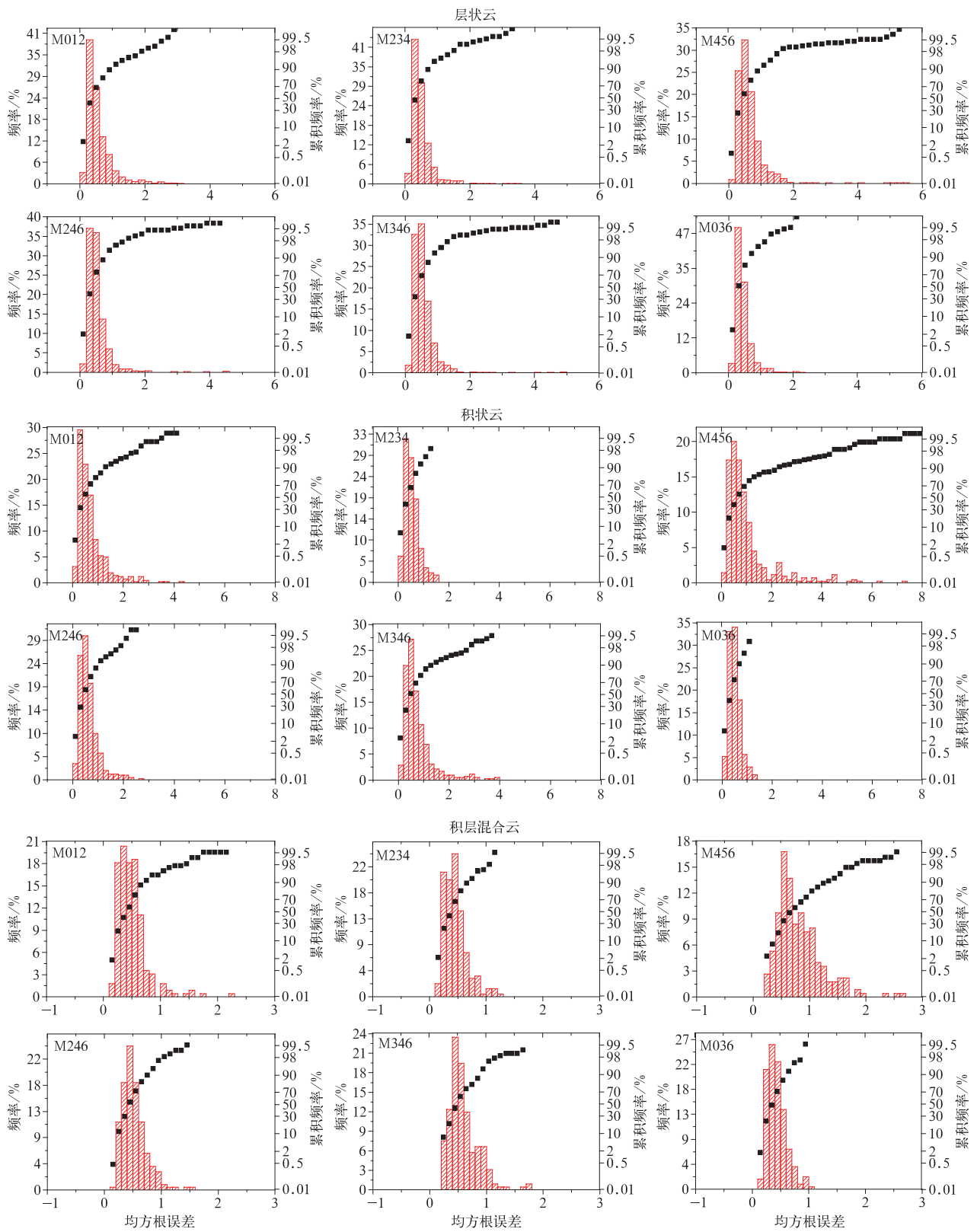


图 7 同图 3, 但为 5 min 滑动平均样本

Fig. 7 Same as Fig. 3, but for 5 min moving average rain DSD

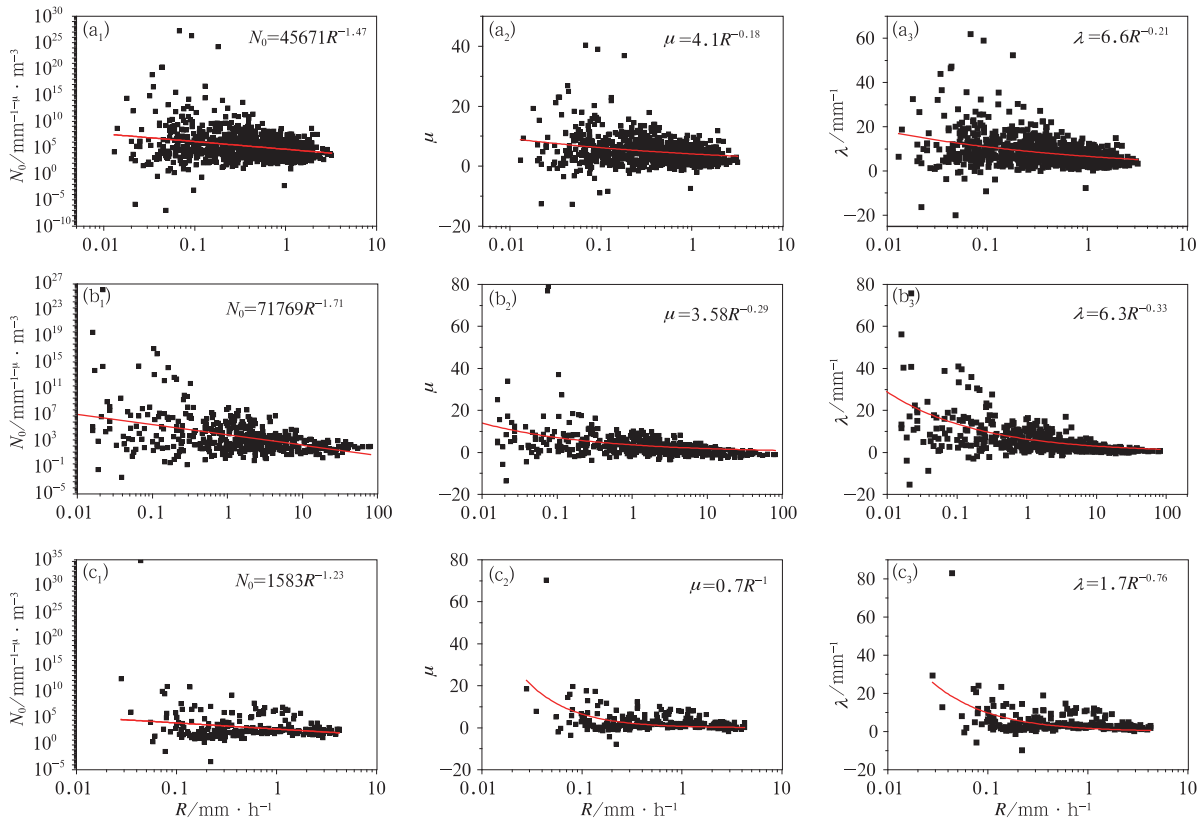


图 8 最小二乘法估算层状云(a)、积状云(b)和积层混合云(c)1 min 雨滴谱三参数( $N_0$ 、 $\mu$ 、 $\lambda$ )随雨强  $R$  的变化

Fig. 8 Scatter plots of three parameters ( $N_0$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ) and rain rate relationship with the least squares method in 1 min rain DSD

(a) stratiform cloud, (b) cumuloform cloud, (c) stratiform mixed with cumuloform cloud

表 7 三种降水云三参数间相互关系(1 min)

Table 7 Correlations of the three parameters of precipitation clouds in 1 min rain DSD

降水云类型	参数关系	相关系数
层状云	$\lambda = 1.41 + 1.37\mu + 0.004\mu^2$	0.94
	$\log N_0 = 2.19 + 0.62\mu + 0.00008\mu^2$	0.96
	$\log N_0 = 1.62 + 0.44\lambda - 0.0008\lambda^2$	0.98
积状云	$\lambda = 1.08 + 1.67\mu - 0.005\mu^2$	0.92
	$\log N_0 = 2.48 + 0.64\mu + 0.0006\mu^2$	0.94
	$\log N_0 = 1.91 + 0.44\lambda - 0.0014\lambda^2$	0.97
积层混合云	$\lambda = 1.28 + 1.20\mu - 0.0005\mu^2$	0.97
	$\log N_0 = 1.95 + 0.55\mu - 0.0008\mu^2$	0.96
	$\log N_0 = 1.36 + 0.46\lambda - 0.0004\lambda^2$	0.98

### 5 结论和讨论

本文对山西忻州 2014 年 8 月 4—23 日间的降水云,使用 OTT-Parsivel 二代激光雨滴谱仪获得的观测数据,研究了估算雨滴谱  $\Gamma$  分布三参数的阶矩法,主要结果如下:

(1)考虑降水云特征的差别将降水分为积状降水云、层状降水云和积层混合降水云。层状降水云持续时间较长,积层混合云次之,积状云较短;对雨滴的平均直径来说:层状云  $< 1$  mm,积状云  $> 1$  mm,积层混合云介于 1 mm 之间;从雨滴的平均体积直径上看:积状云  $>$  积层混合云  $>$  层状云;对于雨滴的有效半径:层状云  $<$  积层混合云  $<$  积状云;对比三者雨滴数密度:积状云  $>$  层状云  $>$  积层混合云。

(2)与其他短量估算 1 min、5 min 平均和 5 min 滑动平均雨滴谱样本的均方根误差平均值对比: M036 平均误差最小;对 1 min 雨滴谱样本来说,估算层状云和积层混合云, M036 估算效果最好,估算积状云,虽然其大滴直径远大于其他两种降水云,但所占数浓度小,而小滴数浓度大,所以 M036 和 M012 估算效果好;对 5 min 平均雨滴谱样本来说,估算层状云和积状云, M036 最好,因为积层混合云中小滴数浓度较小,而雨滴最大直径介于层状云和积状云之间,所以照顾到高阶的 M246 谱宽小于照

顾到低阶的 M036,但从误差集中趋势看,M036 更加集中,估算最好;对 5 min 滑动平均雨滴谱样本来说,估算三种降水云,M036 最好。对于三种降水云估算矩量的均方根误差,M036 估算误差小于最小二乘法,估算最优。

(3)不同地区不同降水类型,雨滴谱参数随雨强  $R$  的变化存在差异,就本文资料而言,三种降水云每分钟雨滴谱三参数随雨强  $R$  的增大而减少;雨滴谱  $\Gamma$  分布三参数  $N_0$ 、 $\mu$ 、 $\lambda$  相互独立,但雨滴谱  $\Gamma$  分布三参数间的关系可用二项式拟合,且相关系数很好,都在 0.94 以上。

本文的研究还很初步,还需对 M036 组合估算其余矩量的均方根误差同其他阶矩法进行进一步对比,提出的新矩量组合 M036 估算最好,三参量物理意义明确,进一步研究将有广阔的应用前景。

## 参考文献

- 陈磊,陈宝君,杨军,等. 2013. 2009—2010 年梅雨锋暴雨雨滴谱特征. 大气科学学报, 36(4): 481-488.
- 胡子浩,濮江平,濮云涛,等. 2014. 南海一次海洋性对流降水云雨滴谱特征分析. 热带气象学报, 30(1): 181-188.
- 罗俊颖,贺文彬,李金辉,等. 2012. 2003 年春季陕西省层状云降水的雨滴谱特征. 气象, 38(9): 1129-1134.
- 明虎,王敏仲,阮征,等. 2014. 风廓线雷达对天山中部一次层状云降水过程的探测分析. 气象, 40(12): 1513-1521.
- 盛裴轩,毛节泰,李建国,等. 2003. 大气物理学. 北京: 北京大学出版社, 290.
- 石爱丽,郑国光,黄庚,等. 2004. 2002 年秋季河南省层状云降水的雨滴谱特征. 气象, 30(8): 12-17.
- 孙晶,史月琴,蔡森,等. 2015. 南方三类云系云结构预报和增雨作业条件分析. 气象, 41(11): 1356-1366.
- 赵震,雷恒池,陈渭民. 2005. 两种不同雨滴谱分布的分析. 大气科学学报, 28(1): 138-143.
- 汪学渊,阮征,李效东,等. 2016. 雨滴谱仪与风廓线雷达反射率对比试验. 气象, 42(1): 107-114.
- 郑娇恒,陈宝君. 2007. 雨滴谱分布函数的选择: 指数和  $\Gamma$  分布的对比研究. 气象科学, 27(1): 17-25.
- 周黎明,王庆,龚佃利,等. 2015. 山东一次暴雨过程的云降水微物理特征分析. 气象, 41(2): 192-199.
- 周毓荃,刘晓天,周非非,等. 2001. 河南干旱年地面雨滴谱特征. 应用气象学报, 12(Z1): 39-47.
- 张培昌,杜秉玉,戴铁丕. 2001. 雷达气象学. 北京: 气象出版社, 171.
- 张文煜,袁九毅. 2007. 大气探测原理与方法. 北京: 气象出版社, 112.
- Atlas D, Srivastava R C, Sekhon R S. 1973. Doppler radar characteristics of precipitation at vertical incidence. Rev Geoph, 11(1): 1-35.
- Chen Baojun, Yang Jun, Pu Jiangping. 2013. Statistical Characteristics of raindrop size distribution in the Meiyu season observed in eastern China. J Meteor Soc Japan ser ii, 91(2): 215-227.
- Cao Q, Zhang G. 2009. Errors in estimating raindrop size distribution parameters employing disdrometer and simulated raindrop spectra. J Appl Meteor Climat, 48(2): 406-425.
- Caracciolo C, Prodi F, Battaglia A, et al. 2006. Analysis of the moments and parameters of a Gamma DSD to infer precipitation properties: A convective stratiform discrimination algorithm. Atmos Res, 80(2-3): 165-186.
- Tokay A, Short D A. 1996. Evidence from tropical raindrop spectra of the origin of rain from stratiform versus convective clouds. J Appl Meteor, 35(3): 355-371.
- Tokay A, Kruger A, Krajewski W F. 2001. Comparison of drop size distribution measurements by impact and optical disdrometers. J Appl Meteor, 40(11): 2083-2097.
- Ulbrich C W, Carlton W. 1983. Natural variations in the analytical form of the raindrop size distribution. J Appl Meteor, 22(10): 1764-1775.
- Ulbrich C W, Atlas D. 1998. Rainfall microphysics and radar properties: Analysis methods for drop size spectra. J Appl Meteor, 37(9): 912-923.
- Zhang G, Vivekanandan J, Brandes E A, et al. 2010. The shape-slope relation in observed Gamma raindrop size distributions: Statistical error or useful information? J Atmos Ocea Tech, 20(8): 1106-1119.