# 变分同化方法在 Lorenz 系统中的简单应用研究

杜川利[1,2]　黄向宇[3]　俞小鼎[4]

(1.中国科学院地球环境研究所,中国科学院研究生院,北京　100039;2.陕西省气象局;
3.Danish Meteorological Institute, Copenhagen, Denmark;4.中国气象局培训中心)

**提　要**

利用 Lorenz 模式作变分同化数值试验,通过对一个简单系统的讨论,介绍四维变分同化方法。对初值敏感性和观测点的个数及观测值作了对比试验,发现随着模式对初值敏感性的增加,同化效果会越来越差;观测点越少,观测值误差越大,这些都会影响同化效果,甚至导致同化失败。

**关键词:** 伴随模式　变分同化　Lorenz 系统

## 引　言

四维变分资料同化技术是 20 世纪 90 年代发展起来的一种全新的同化方法,不但能非常自然地把观测资料和数值模式奇妙的结合起来,也适用于非定时资料的同化。随着数值天气预报的发展,越来越多的探测资料(如卫星、雷达等)被应用在数值模式中,如欧洲中期天气预报中心(ECMWF),已将四维变分技术业务化,并取得了很好的效果。其实,早在 1958 年,Sasaki[1] 就提出数值预报客观分析的变分方法,但由于数值预报模式的维数巨大,求梯度的大计算量使其无法在业务中广泛应用,直到 Le Dimet 和 Talagrand[2] 于 1986 年提出了一种计算目标函数梯度的便捷算法,即伴随模式(Adjoint)方法,再加上现代计算设备计算能力的提高,使四维变分方法作为一种同化数值预报初值场的手段得以迅速发展。目前我国研究同化模式的文章较多,但是对初值敏感性和观测值误差研究的文章较少。所以,这篇论文利用 Lorenz 系统,简要介绍在同化过程中如何构造伴随方程,并通过初值敏感性和观测点个数及观测值误差这两个方面对原模式作对比试验研究。

## 1　基本原理

四维变分同化方法是通过构造一个目标函数 $J$,来检验在同化期间模式输出值与观测值相差是否最小。通常希望目标函数的形式是二次型的,并且是凸的,这样在求最小化时函数才能收敛。最后,问题就归结为以同化模式的控制方程组为约束条件下的泛函极小化问题,关键是计算目标函数关于模式控制变量的梯度,它可以由伴随模式向后积分得到。

### 1.1　基本方程

Lorenz 模型[3~5] 是 1963 年 Lorenz 和 Saltzman 在研究流体有限振幅对流时提出的非线性谱模式,其形式为:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t} &= -pw_1 + pw_2 \\ \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}t} &= [r - w_3]w_1 - w_2 \\ \frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}t} &= w_1 w_2 - bw_3\end{aligned} \tag{1}$$

其中,$t$,$p$,$r$ 和 $b$ 分别是时间、Prantl 数、Rayleigh 数及与对流尺度联系的参数,$w_1$ 是对流强度,$w_2$ 是最大温度差,$w_3$ 是对流引起的层变化。虽然该模型简单,但这个非线性系统却与大气系统有很多相同的动力特征。

定义的目标函数为：

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_{max}}(w_k^f-w_k^o)^{\mathrm{T}}(w_k^f-w_k^o) \quad (2)$$

其中，$w_k^f$ 是模式第 $k$ 步输出值，$w_k^o$ 是观测值，$k$ 是时间步，如果 $w_k^o$ 中有缺测的值由相应的 $w_k^f$ 中的值代替。

根据式(1)、(2)，变分同化的本质是调整模式的初始状态 $w_0^f$，使 $J$ 最小化，其值可用以下迭代过程表示：

$$w_0^{f,n+1}=w_0^{f,n}-\alpha\nabla J(w_0^{f,n}) \quad (3)$$

其中，$n$ 是迭代次数，$\alpha$ 是与收敛的相关参数，$\nabla J$ 是关于初始场 $w_0^{f,n}$ 目标函数梯度。当式(3)收敛时，$w_0^{f,n}$ 逼近 $w_0^{f,\infty}$，则可满足式(2)最小化要求。

根据式(3)，可以看出，只要计算出目标函数的梯度 $\nabla J$，就很容易得出目标函数的值。对于一般大气模式，采用所谓的伴随模式方法，通过伴随模式向后积分就可以获得精确的目标函数梯度值[6,7]。基本过程是：非线性方程组→切线方程→伴随方程→目标函数梯度。

## 2 试验结果

### 2.1 初值敏感性试验

通过 Lorenz 方程组的向前积分方案，选择合适的参数和初值，可以得到大气的基本特征。在试验 1、试验 2 中，模式参数：$p=10, r=33, b=8/3$，假定模式初始值 $w_1=1.00$，$w_2=3.00$，$w_3=5.00$，时间(无因次)增量为 0.01，积分长度为 1000 步，不同的是试验 2 比试验 1 中的初值高 10%。在试验 3、试验 4 试验中，模式参数：$p=10, r=11, b=8/3$，积分步长及长度不变，只是试验 4 比试验 3 中的初值高 10%。

根据 1963 年提出的 Lorenz 方程，在给定 $p=10, b=8/3$ 时，临界的 Rayleigh 数为 24.74，当 $r$ 大于此临界值时，Lorenz 系统进入混沌区，当初值发生很小的变化时，模式结果将发生很大的变化。在图 1a 中，$r=33$，试验 2 比试验 1 的初值高 10%，可以看出，模式的结果相差很大，能反映大气的一些动力性质：随着 $r$ 的增大，流型由对流态变到混沌态，非线性的作用愈来愈强，模式对初值也愈来愈敏感，初值稍有不同，解的轨迹完全两样。在图 1b 中，作为对比，取 $r=11$，远小于临界的 Rayleigh 数，试验 4 比试验 3 的初值高 10%，可以看出在整个积分期间，两者变化非常接近，并且振幅越来越小，最后接近零。所以，Lorenz 系统具有整体稳定性(耗散)和局部不稳定性(负恢复力)，它在三维相空间中必然导致混沌[3]。

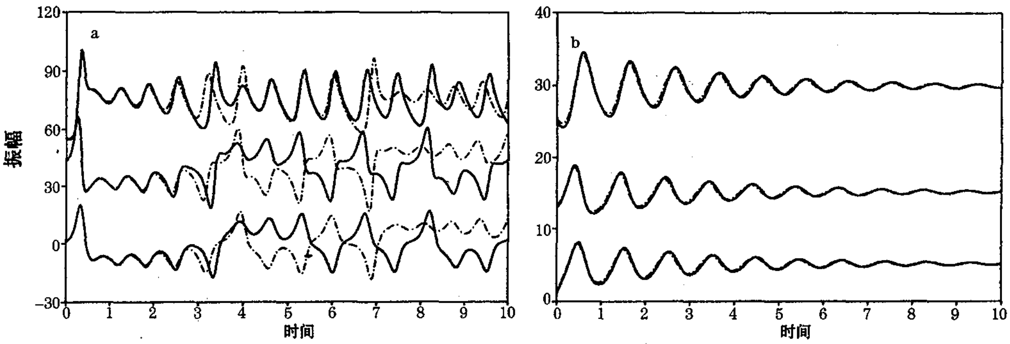


**图 1** (a)Lorenz 方程向前积分结果，$r=33$，大于临界的 Rayleigh 数，其中 3 条曲线从下到上分别代表 $w_1, w_2, w_3$，(b)$r=11$，小于临界的 Rayleigh 数

### 2.2 变分同化对比试验

根据以上所述不同控制变量选择方法，选择如下模式参数：$p=10, r=33, b=8/3$，模式初始值 $w_1=1.00$，$w_2=3.00$，$w_3=5.00$，时间增量为 0.01，积分长度为 200 步，下降步长 $\alpha=0.0005$，这里假设模式没有误差。基于如下考虑，设计对比方案：方案 1，在同化的时间窗内，观测点的个数、观测值误差不变，对模式的初猜值作对比试验；方案 2，初猜值误差不变，对观测值的误差及观测

点的个数作对比试验。

**2.2.1** 方案1

在图2a、b、c的试验中，模式的初猜值有10%的误差，观测点选取了5个，观测值的误差为10%，其它参数值同试验1。正如所看到的，该同化模式效率还是比较高的，经过5次循环后，模式的输出值就已经非常接近模式的"真值"和观测值了；在循环10次以后，二者几乎就没什么差别了。

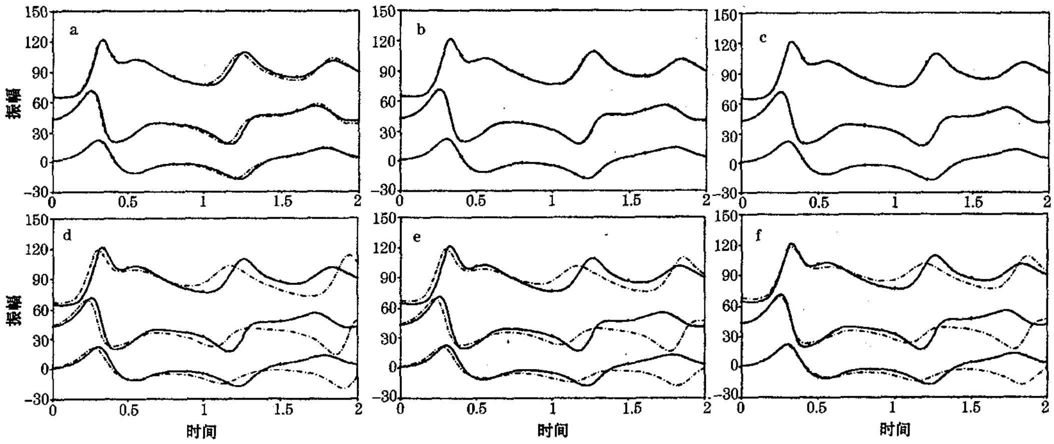


**图2**　试验结果（实线为模式"真值"，虚线为同化结果，+为观测点）

a、b、c模式的初猜值有10%误差，分别代表循环1、10、100次

d、e、f模式的初猜值有40%的误差，分别代表循环1、10、100次

另外，从图2a、b、c可知，在整个积分过程中，通过一次循环，可以提高一点初始场的优化程度，以减小模式输出值与模式"真值"及观测值的差距，这样几次循环后，其差距就非常小了，可得满意的初始场；在一次循环中，前半段同化程度优于后半段，随着循环次数增加，这种差异逐渐变小。在图2d、e、f的试验中，模式的初猜值有40%的误差，其它参数值同图2a、b、c的试验。正如所看到的，不管模式循环多少次，模式的输出值始终无法接近模式的"真值"和观测值，所以初猜值对同化的结果也起着重要作用。试验后可知，当模式初猜值误差小于40%时，通过循环迭代过程，都可以获得满意的结果（小于10次），只是误差值越大，需要循环的次数就越多。

**2.2.2** 方案2

观测值误差试验。在观测点不变的情况下，分5组进行试验，误差分别为10%、20%、30%、50%、80%，结果表明：

（1）当观测误差小于50%时，误差对同化效果影响不大。也就是说，每次循环后，不同的误差对模式输出值不敏感，目标函数的值比较接近。

（2）下降的速度基本一样，在循环10次以后，基本上就可以取得满意的初始场了，而且循环的次数越多，效果越好。

（3）当观测误差大于50%时，情况与上述有些不一样（图略）。在开始阶段，随着循环次数的增加，同化效果也逐渐变好，只是速度慢很多，在循环到20次后，取得较好初始场；当循环次数继续增加时，结果并没有像预想的那样同化效果越来越好，无法达到最优，这同观测误差较大有直接关系。

模式变量观测值缺测试验，同样也考虑了三种情况，即一个变量缺测、两个变量缺测、三个同时缺测。发现结果也存在两种情况（图略），在整个时间窗内如果观测点较多（该文选5个），少数变量缺测对同化效果有影响，但是通过多次循环以后亦可达到满意结果，但如果大多数变量（4个）都缺测的话，循环多少次模式初值都不可能达到最优化值；如果观测点较少（只有1个），对同化结果影响甚大，任何一个变量缺测都导致同化失败。

**2.2.3** 结果讨论

可以看到，要得到一个与模式初值相协调的初始场，需要预先做很多试验性准备工作。有些是和模式的动力性质有关，如不同参数的选择模式对初猜值敏感性则有很大不同，模式参数发生变化，而同化模式的参数不随之改变，很可能变分同化的工作就没有意义；有些是和同化过程中一些设置有关，如观测值误差与循环迭代的关系，如果一味地认为只要循环次数多，同化效果就好，而不考虑观测点的多少、观测值的误差的话，那么结果可能适得其反。

四维变分资料同化方法是将动力约束与资料约束（模式变量资料）以及同化时段内多时次观测资料中所包含的时间演变信息作为一个整体同时考虑，另外由于大气的动力性质，任何一个环节出现较大误差（如模式初猜值误差大于40%），都将影响同化结果。

## 3　结　语

用Lorenz系统作变分同化试验，通过伴随方法计算目标函数梯度，反演最优初值。通过试验可以得到以下结论：

（1）初猜值的选择对变分同化过程起着很大作用，这是由模式的动力性质决定的。对于处在混沌状态下的Lorenz系统，如果初猜值的误差大到一定程度，则会导致目标函数下降很慢，经过多次循环迭代以后都难以达到收敛，造成同化失败。

（2）伴随模式及目标函数梯度在同化过程前需要进行检验。

（3）模式的可预报性与同化效果联系在一起。选择合理的时间窗，从观测场中提取尽可能多的信息，得到既最大限度符合“实际观测值”，又与数值模式相协调的最优初始场。

## 参考文献


1　Pierre G. Chaos and Quadri-dimensional Data Assimilation: A Study Base on Lorenz Model, Tellus Ser A, 1992, 44:2—17.

2　Stensrud D J and Bao J W. Behavior of Variational and Nudging Assimilation Techniques with a Chaotic Low-order Model. Mon Wea Rev, 1992, 120:3016—3028.

3　Lorenz E N. Deterministic Nonperiodic Flow. J Atmos Sci, 1963, 20:130—141.

4　Ronald M Errico. What is an Adjoint Model. Bull Amer Meteor Soc, 1997, 78:2577—2591.

5　Navon I and D M Legler. Conjugate-gradient Methods for Large-scale Minimization in Meteorology. Mon Wea Rev, 1987, 115:1479—1502.

6　Navon I, X Zou, J Derber and J Sela. Variational Data Assimilation with an Adiabatic Version of the NMC Spectral Model. Mon Wea Rev, 1992, 120:1433—1446.

7　郜吉东，丑纪范. 数值模式初值的敏感性程度对四维同化的影响——基于Lorenz系统的研究. 气象学报. 1995, 53(2):472～479.


# Simple Application of Variational Four-dimensional Assimilation in Lorenz System


Du Chuanli[1,2]　Huang Xiangyu[3]　Yu Xiaoding[4]

(1. Institute of Earth and Environment, Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing　100039;
2. Shaanxi Meteorological Bureau; 3. Danish Meteorological Institute, Copenhagen, Denmark; 4. Training Centre, CMA)



**Abstract**

The adjoint technique is used in the variational data assimilation using the famous Lorenz model. The numerical experiment shows that the four dimensional assimilation has some relation with the model's predictability, with the increase of error of initial guess field, the effect of the assimilation model become even worse, until the assimilation process fails completely. In the time window of assimilation, if the points of observation are enough, the errors of the observation will not affect the effect of assimilation very much, this will be beneficial for the satellite and radar data assimilation used in operational weather prediction model.


**Key Words:** adjoint model　variational assimilation　lorenz system