

## 原始方程模式中的实现

陈起英 庄世宇 金之雁

(国家气象中心,北京 100081)

## 提 要

简单介绍了半拉格朗日平流方案的基本概念,并详细总结了其在全球原始方程模式,特别是在 IFS 模式中的具体实现过程。拉格朗日平流的观点是跟着流体质点看流体运动,其实现的关键是流体轨迹的计算。轨迹中点和起始点水平坐标的求得可以利用球面三角,直接在球极坐标中进行,并采用一些较高的近似。为了充分获得半拉格朗日方案的益处,在起始点的内插公式其阶数至少应在四阶(三次)以上,为避免昂贵的三维三次内插,可以采用三维“准三次”内插。

**关键词:** 半拉格朗日平流 流体轨迹 球面三角形

## 引 言

随着国民经济的不断发展和社会公益服务要求的日益增加,人们对天气预报的准确性和及时性提出了更高的要求。而现代天气预报对数值预报的依赖,要求在最先进的计算机上,采用最适合的编程技术和最有效的数值方法实现具有更高分辨率、包含更复杂物理过程的数值天气预报模式和更好地利用更多观测资料的变分同化技术方案。

早期的模式采用显式蛙跳方案,积分时间步长受到重力波传播速度的严重限制。在这种情况下,模式需要进行更多时步的积分,但由于其时间截断误差远小于空间截断误差,模式的准确率并没有增加。采用半隐式方案以后,时间步长不再受到重力波速的限制,比以前增加了 6 倍左右,但仍受到平流风速的限制。半隐式半拉格朗日的平流方案则进一步消除了这种限制,模式积分时间步长又增加了 6 倍左右<sup>[1]</sup>。

目前,对半隐式半拉格朗日平流方案的理论基础和具体实现过程有了较多的讨论和研究成果,国内也有陈嘉滨等人<sup>[2]</sup>从事这方面的工作。半隐式半拉格朗日平流方案已被应用到许多全球或区域的格点或谱模式中,并取得了较好的结果。董敏<sup>[3]</sup>对半拉格朗日方法的应用技术及其优、缺点曾进行过介绍。本文作者在分析欧洲中心目前业务运行的中期预报模式 IFS (Integrated Forecasting System) 的机器测试版本程序的同时,查阅了一些国内外在这方面的文献资料。综合这两者,本文将对半拉格朗日方法在全球原始方程模式中,尤其是在 IFS 模式中的具体实现过程作一介绍。

## 1 基本概念

为简单计,以一维平流方程为例,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\text{其中, } \frac{dx}{dt} = U(x, t) \quad (2)$$

为一给定的函数。方程(1)表明沿着流体路径  $F$  是常数。图1为半拉格朗日平流的概念示意图<sup>[1]</sup>,实曲线为在  $t_n + \Delta t$  时刻到达格点  $x_m$  的流体质点的确切轨迹,虚线  $A'C$  为近似轨

迹。假定  $F(x, t)$  在时间  $t_n - \Delta t$  和  $t_n$  的所有网格点  $x_m$  上的值是已知的,半拉格朗日平流方案的实质就是对方程(1)沿着近似轨迹  $A'C$  进行近似积分。

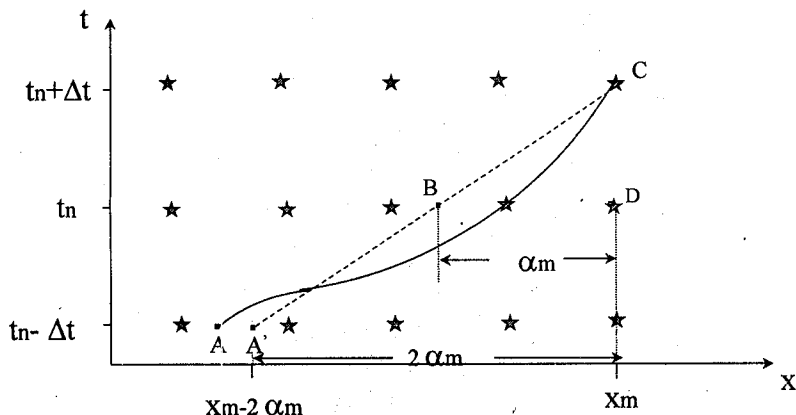


图1 半拉格朗日平流

星星表示格点,实曲线  $AC$  为  $t_n + \Delta t$  时刻到达格点  $x_m$  的流体质点的确切轨迹,虚线  $A'C$  为近似轨迹,  $B$  为近似轨迹的中点,  $\alpha_m$  为质点在  $\Delta t$  时间内在  $x$  方向的位移

$$\frac{F(x_m, t_n + \Delta t) - F(x_m - 2\alpha_m, t_n - \Delta t)}{2\Delta t} = 0 \quad (3)$$

$\alpha_m$  是流体质点在时间  $\Delta t$  内,沿着近似轨迹  $A'C$  在  $x$  方向移动的距离。因此,如果知道  $\alpha_m$ ,  $F$  在  $t_n + \Delta t$  时刻到达点  $x_m$  的值,即为其在  $t_n - \Delta t$  时刻在点  $x_m - 2\alpha_m$  的值。点  $x_m - 2\alpha_m$  一般不在网格点上,需要进行内插。

对方程(2)采用  $O(\Delta t^2)$  近似(如采用  $O(\Delta t)$  近似,则会大大降低半拉格朗日方案的准确性),则

$$\alpha_m = \Delta t U(x_m - \alpha_m, t_n) \quad (4)$$

这是一个隐式的方程,需要给出第一猜值  $\alpha_m^{(0)}$  并进行迭代求解。

## 2 具体实现

### 2.1 方程

本文以 IFS 模式采用的方程形式<sup>[4]</sup>为例

进行说明,且只介绍垂直内插的半拉格朗日方案的实现过程,垂直非内插的半拉格朗日方案只需稍加变化。

因为拉格朗日导数出现在水平运动方程的动量  $U-V$  形式中比出现在  $\zeta-D$  方程中更自然,  $U-V$  形式的运动方程更适合于拉格朗日模式<sup>[5]</sup>。但当采用半拉格朗日平流方案处理动量方程时,  $V(V = v \cos \theta)$  分量方程中的度量(metric)项  $\sin \theta (U^2 + V^2)$  将在极点  $\theta = \pm \pi/2$  附近产生不稳定。为了避免对度量项进行显式处理,水平动量方程需要用矢量形式进行积分<sup>[5]</sup>。

$$\begin{aligned} & \frac{\vec{V}_H^+ - \vec{V}_H^-}{2\Delta t} + (f \vec{k} \times \vec{V}_H + \nabla \Phi + \\ & R_d T_v \nabla \ln P)^0 = \\ & P \vec{v} + K \vec{v} - \frac{\beta}{2} \Delta_H \nabla (YT + R_d T_v \nabla \ln p_s) \end{aligned}$$

$$(YT)_k = \alpha_k R_d T_k + \sum_{j=k+1}^{NLEV} R_d T_j \ln \left( \frac{p_{j+1/2}^r}{p_{j-1/2}^r} \right) \quad (5)$$

其中,  $\vec{V}_H = (u, v)$  为水平风矢,  $P\vec{v}$  和  $K\vec{v}$  分别表示物理参数化和水平扩散的贡献。“+”, “0”, “-”分别表示在轨迹的到达点  $(\vec{x}, t + \Delta t)$ , 中点  $(\vec{x} - \vec{\alpha}, t)$  和起始点  $(\vec{x} - 2\vec{\alpha}, t - \Delta t)$  进行计算。对于动量方程,  $[\ ]^0$  项由  $t$  时刻轨迹起始点和到达点值的平均来计算, 有利于减少计算花费并提高精度<sup>[6]</sup>。半隐式校正项采用以下形式:

$$\Delta_n X = [X(\vec{x}, t + \Delta t), -X(\vec{x}, t)] + [X(\vec{x} - 2\vec{\alpha}, t - \Delta t) - X(\vec{x} - 2\vec{\alpha}, t)]$$

中间时间层项  $X^0$  取为  $t$  时刻在轨迹两端点的平均值, 与对气压梯度线性项的计算取得一致, 从而减少了在 CFL 数  $> 1$  时模式对地形强迫波的歪曲。

热力学方程、水汽方程和连续方程的半拉格朗日形式与动量方程类似, 这里不再详细列出。但需要指出的是, 与动量方程不同, 它们的  $[\ ]^0$  项在轨迹中点进行计算。

## 2.2 轨迹(中点和起始点坐标)的计算

如第1节所述, 求轨迹 A/C 需迭代求解位移  $\alpha$ ,

$$\vec{\alpha}^{(k+1)} = \Delta t \vec{V} [\vec{x} - \vec{\alpha}^{(k)}, t] \quad (6)$$

第一猜值可以取为  $\vec{\alpha}^{(0)} = \Delta t \vec{V}(\vec{x}, t)$ , 即采用“向后第一猜值”, 利用格点值。在计算  $\alpha$  的水平分量之前, 要先更新右边项中  $\alpha$  的垂直分量。实践表明两次迭代就足够了, 更多的迭代并不能带来更多的益处。

在具体求解上式时, 有3种主要的方法。方法之一是, 直接在  $(\lambda, \theta)$  坐标中计算  $(\Delta\lambda, \Delta\theta)$ , 通过

$$\Delta\lambda = \Delta t \frac{d\lambda}{dt}(t) + O(\Delta t^2)$$

$$\Delta\theta = \Delta t \frac{d\theta}{dt}(t) + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{d\lambda}{dt}(t) = \frac{u[\lambda(t), \theta(t), t]}{a \cos\theta(t)}$$

$$\frac{d\theta}{dt}(t) = \frac{v[\lambda(t), \theta(t), t]}{a}$$

董敏<sup>[3]</sup>在其文中介绍的轨迹求法, 在纬度低于  $70^\circ$  的地区采用的就是这种方法。但 Ritchie<sup>[7]</sup>指出, 这种方法相当于在  $(\lambda, \theta)$  空间用直线近似轨迹, 这种近似是比较差的, 尤其是在极点附近。虽然 Williamson 和 Rasch<sup>[8]</sup>提出在  $70^\circ$  以外的地区采用局地测量坐标系来求解, 通过坐标变换, 使较高纬度地区的点位于新坐标系的赤道上, 对减少在极区附近相对较严重的问题有一定作用, 但这种近似仍然是比较粗略的。

方法之二是, 转换到正切笛卡尔平面进行轨迹计算<sup>[5,7]</sup>。这种方法的精度虽然比较高, 但较多的三角函数计算却带来昂贵的花费。第三种方法利用了球面三角<sup>[9]</sup>, 与第一种方法相似的是, 也在  $(\lambda, \theta)$  空间进行求解。但第一种方法相当于是只保留到  $O(\Delta t)$  项的近似, 第三种方法还保留了下一阶项。因此它比第一种方法更精确, 又比第二种方法更经济、有效。IFS 模式中采用的正是这种方法。

### 2.2.1 中点坐标

中点的垂直坐标由下式计算:

$$\eta(t)^{(k+1)} = \eta(t + \Delta t) - \Delta t \dot{\eta}(r^{(k)}, \eta^{(k)}, t) \quad (7)$$

水平坐标的计算沿着一个球面大圆轨迹进行, 需要用到球面三角, 具体推导过程见文献<sup>[5]</sup>。图2为计算示意图, 其中  $R$  为流体质点在  $t$  时刻的位置,  $R_1$  为在  $t + \Delta t$  或  $t - \Delta t$  时刻的位置。  $C$  为沿着位置  $R$  处的  $V_H$  的单位矢量。  $\alpha$  为沿着大圆轨迹  $R$  与  $R_1$  之间的角位移。通过一系列的推导, 可以得到中点  $R$  的坐标  $(\lambda^0, \theta^0)$ :

$$\lambda^0 = \lambda^+ - \frac{u\Delta t}{a \cos\theta^+} \left[ 1 + \frac{\Delta t^2}{6a^2} \left( \frac{u^2}{\cos^2\theta^+} - v^2 \right) \right] + O(\Delta t^5) \quad (8)$$

$$\theta^0 = \theta^+ - \frac{v\Delta t}{a} + \frac{\tan\theta^+}{2} \left( \frac{u\Delta t}{a} \right)^2 + O(\Delta t^3) \quad (9)$$

其中,  $(\lambda^+, \theta^+)$  为到达点的坐标。中点坐标的

求得需要两次迭代过程。

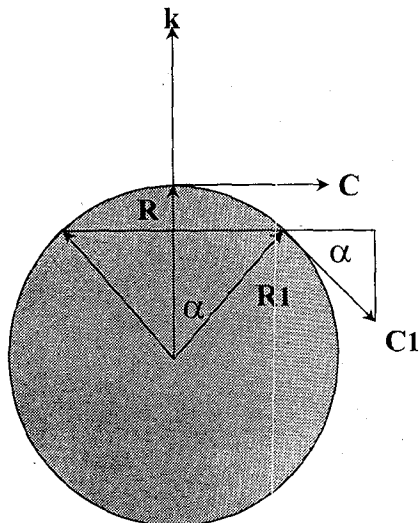


图2 沿着轨迹的矢量

$C$ 为沿着位置  $R$  处的水平风矢  $V_H$  的单位矢量,  $R$  为流体质点在  $t$  时刻的位置,  $R_1$  为在  $t + \Delta t$  或  $t - \Delta t$  时刻的位置,  $\alpha$  为沿着大圆轨迹  $R$  与  $R_1$  之间的角位移。

### 2.2.2 起始点坐标

一旦求得了中点的坐标,起始点的坐标也可以计算了。其垂直坐标为:

$$\eta(t - \Delta t) = \eta(t + \Delta t) - 2\Delta t \dot{\eta}(\bar{r}(t), \eta(t), t) \quad (10)$$

与中点水平坐标的推导类似,可以得到由到达点(格点)坐标  $(\lambda^+, \theta^+)$  计算起始点坐标  $(\lambda^-, \theta^-)$  的近似公式:

$$\lambda^- = \lambda^+ - 2(\sec\theta^+) \frac{u\Delta t}{a} \left[ 1 - (\tan\theta^+) \left( \frac{v\Delta t}{a} \right) \right] + O(\Delta t^3) \quad (11)$$

$$\theta^- = \theta^+ - 2 \frac{v\Delta t}{a} + \left( \sec^2\theta^+ - \frac{2}{3} \right) \left( \frac{u\Delta t}{a} \right)^2 \frac{v\Delta t}{a} + O(\Delta t^4) \quad (12)$$

在垂直方向上,如果起始点位于第一个模式层以上或最后一个模式层以下时,需要张弛到第一或最后一个模式层上。

### 2.3 空间内插

中点和起始点一般不是网格点,需要进行内插,而内插公式的选择对半拉格朗日方

案的准确性和有效性有重要的影响。不同模式采用的内插公式不同,但都一致认为在求轨迹时内插阶数不是很重要,而在起始点进行内插时,则需要三次以上的内插公式。本文就以 IFS 模式中采用的内插方案为例。

#### 2.3.1 求轨迹中点 $[r(t), \eta(t)]$

许多研究<sup>[10-12]</sup>发现,当在起始点用三次内插时,轨迹计算用线性内插就足够了。因此,IFS 模式对 midpoint 风进行了三维线性内插,即在水平的两个方向和垂直方向都采用线性内插,对内插点有贡献的邻点有8个。

#### 2.3.2 在轨迹中点计算的项

IFS 模式对在 midpoint 计算的三维项进行8点的三维线性内插,对二维项进行4点的二维线性内插。

#### 2.3.3 在轨迹起始点计算的项

如上所述,对在起始点计算的项进行三次以上的内插是必要的,但三维三次内插是非常昂贵的。因此在 IFS 模式中,为避免三维的三次内插,采用了三维“准三次”内插的方法。即在水平方向,参与内插的四层中的最上和最下层(第1、4层)进行二维线性内插(4+4=8),中间两层(第2、3层)进行二维的“准三次”内插(12+12=24)。在垂直方向对第1到4层的水平内插值进行三次内插求得内插点的值。对内插点有贡献的总邻点数为 24+8=32,比三维的三次内插(邻点数为64)减少了一半。计算量也由21个一维三次内插减少为7个一维三次+10个一维线性内插。IFS 模式采用的三次内插公式是多项式内插。

图3为二维“准三次”内插的示意图。在第1、4纬度上进行一维线性内插,在第2、3纬度上进行一维三次内插。最后在经圈方向对各纬度的内插点进行一维三次内插。因此,有贡献的邻点为  $2 \times 2 + 2 \times 4 = 12$ 。

另外,对于谱模式的精简格点,需要先在  $\lambda$  方向进行内插,这样由于网格点不规则所带来的额外复杂性就会相当小。当内插点在

两个最高的模式层或两个最低的模式层之间时,垂直内插就变为线性的。

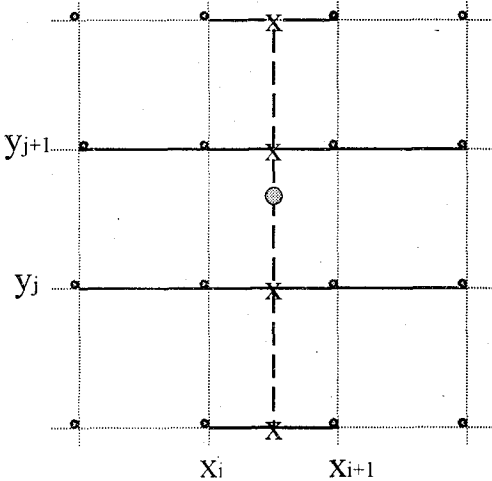


图3 二维“准三次”内插示意图

小圈表示网格点,大圈表示被内插的点,实线连接的点为对内插有贡献的格点,X号表示各纬圈上的内插点

## 2.4 经线的延伸

当内插点 $(\lambda, \theta)$ 在极点附近时,需要延伸经线使 $|\theta| > \pi/2$ 时函数有意义。具体方法如下:

$$\text{对任意标量场 } H, H\left[\lambda, \frac{\pi}{2} + \epsilon\right] =$$

$$H\left[\lambda \pm \pi, \frac{\pi}{2} - \epsilon\right], \text{在北极附近。}$$

$$H\left[\lambda, -\frac{\pi}{2} - \epsilon\right] = H\left[\lambda \pm \pi, -\frac{\pi}{2} + \epsilon\right], \text{在南极附近。}$$

## 3 结论

本文对半拉格朗日方法的基本概念和其在欧洲中心的业务模式IFS中的具体实现过程做了较详细的介绍,包括半拉格朗日方法采用的方程和半隐式校正项的形式,中点和起始点坐标的计算及在不同阶段内插阶数的选择。作者希望本文对半拉格朗日方法的介绍,能给感兴趣的读者一个清晰的脉络,从而为具体的工作提供一点参考。

## 参考文献

- 1 Staniforth, A. and J. Cote. Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models— A Review. Amer. Meteor. Soc. 1991, 119: 2206~2222.
- 2 Chen Jia-bin and Wang Jun. Studies on non-interpolating semi-Lagrangian scheme and numerical solution to Kdv equation. Advances in Atmos. Sci., 1996, 13: 225~228.
- 3 董敏. 半拉格朗日方法及其在数值模拟和数值预报中的应用. 应用气象学报, 1997, 8: 99~108.
- 4 Ritchie, H. Implementation of the Semi-Lagrangian Method in a High-Resolution Version of the ECMWF Forecast Model. Amer. Meteor. Soc., 1995, 123: 489~514.
- 5 Ritchie, H. Application of the Semi-Lagrangian Method to a Spectral Model of the Shallow Water Equations. Amer. Meteor. Soc., 1988, 116: 1587~1595.
- 6 Tanguay, M., E. Yakimiw, H. Ritchie, and A. Robert. Advantage of Spatial Averaging in Semi-implicit Semi-Lagrangian Schemes. Amer. Meteor. Soc., 1992, 120: 113~123.
- 7 Ritchie, H. Semi-Lagrangian Advection on a Gaussian Grid. Amer. Meteor. Soc., 1987, 115: 608~619.
- 8 Williamson D L and Rasch P J. Two dimensional semi-Lagrangian transport with shape preserving interpolation. Mon. Wea. Rev., 1989, 117: 102~129.
- 9 Ritchie, H. and C. Beaudoin. Approximations and Sensitivity Experiments with a Baroclinic Semi-Lagrangian Spectral Model. Amer. Meteor. Soc., 1994, 122: 2391~2399.
- 10 Staniforth, A., and J. Pudykiewicz. Reply to comments on and addenda to "Some properties and comparative performance of the Semi-Lagrangian method of Robert in the solution of the advection-diffusion equation." Atmos. Ocean, 1985, 23: 195~200.
- 11 Temperton, C., and A. Staniforth. An efficient two-time-level Semi-Lagrangian semi-implicit integration scheme. Quart. j. Roy. Meteor. Soc., 1987, 113: 1025~1039.
- 12 Bates, F. H. M. Semazzi, R. W. Higgins and S. R. M. Barros. Integration of the shallow-water equations on the sphere using a vector semi-Lagrangian scheme with a multigrid solver. Mon. Wea. Rev., 1990, 118: 1615~1627.

# Implementation of the Semi-Lagrangian Method in the Primitive-equations Model

Chen Qiyang Zhuang Shiyu Jin Zhiyan

(National Meteorological Center, Beijing 100081)

## Abstract

The basic concept of the Semi-Lagrangian method was simply introduced, and then its concrete implementation in the primitive-equations model, especially in IFS model was presented. The idea of the Lagrangian advection is that an observer watches the world evolve around him as he travels with a fluid particle, and the key to its implementation is the calculation of the trajectory. Taking advantage of the spherical trigonometry and a higher-order approximation, the horizontal coordinates of the position for the midpoint and the departure point of the trajectory can be calculated directly in the spherical polar coordinates. To obtain the advantages of a semi-Lagrangian integration scheme, it was necessary to choose the order of the interpolation higher than fourth-order for the terms evaluated at the departure point. However, in order to avoid expensive cubic interpolation in three dimension, it was better to choose 3D "quasi-cubic" interpolation.

**Key Words:** Semi-Lagrangian fluid trajectory spherical trigonometry