

欧拉方程中三个参数选取 与雷达测定区域降水量的精度

李建通

张培昌

(福建省厦门市气象局, 361012) (南京气象学院, 210044)

提 要

通过数值模拟资料和实测资料探讨欧拉方程三个参数选取原则和物理意义, 研究表明参数的选取和雷达测定区域降水量存在一定的关系。这一结果为使用变分法测定区域降水量精度的提高, 提供了有益参考。

关键词: 变分方程 欧拉方程 天气雷达 区域降水量

引 言

在雷达定量测量区域降水量的领域里, 目前常用的有两类方法: 一类是基于大量气候统计资料的基础上, 取得反映某个地区的气候 Z-I 关系作为每次实时观测订正的标准。例如 ATI 法、HART 法、气候概率配对法等^[1-3]。这类方法具有使用较少地面雨量站资料的优点, 也能保证一定的精度, 但该方法只能估计一定的气候区域内一段时间间隔内的累积降水量, 对于瞬时的雨强分布和强中心定位等则不一定准确, 特别对于那种由于地物或其他原因造成的无雷达回波的情况就无法订正; 另外的一类方法则是强调用一定密度的雨量站网作为雷达实时订正的标准, 这类方法综合利用了雨量计单点准确性和雷达观测降水的时空连续性的优点, 能够有效反映降水总量和分布情况, 如平均校准法、空间校准法、变分校准法等^[4-6]。前人的工作表明: 变分法的效果最好, 它既能把雷达探测到的结果校准成雨量计的观测结果, 又能保持雨量计之间雷达探测到的降水变化, 对于降水引起的衰减也在校准中获得订正, 其次是空间校准法, 最后才是平均校准法。

1 变分法测量区域降水量

1.1 变分法的基本原理

变分法在定量测量区域降水量的领域中的应用, 就是在地面雨量计场和雷达观测场基础上求一个最佳分析场。欲得到上述分析场, 须满足以下条件:

①在每一个格点上, 使分析值 PS_{ij} 和雨量计的实际观测值 PSG_{ij} 之间的偏差最小;

②在每一个格点上, 使分析值 PS_{ij} 和雷达的实际观测值 PSR_{ij} 间的偏差最小;

③要使得最终的分析场相对平滑, 亦即要满足以下三个条件:

$$\alpha_g(PS_{ij} - PSG_{ij}) \rightarrow \text{Min} \quad (\text{a})$$

$$\alpha_r(PS_{ij} - PSR_{ij}) \rightarrow \text{Min} \quad (\text{b})$$

$$\beta \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} (PS_{ij}) \right]^2 - \left[\frac{\partial}{\partial y} (PS_{ij}) \right]^2 \right\} \rightarrow \text{Min} \quad (\text{c})$$

由式(a)、(b)、(c)得:

$$\begin{aligned} I = & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_g (PS_{ij} - PSG_{ij})^2 \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_r (PS_{ij} - PSR_{ij})^2 \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} (PS_{ij}) \right]^2 \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial y} (PS_{ij}) \right]^2 \right\} \rightarrow \text{Min} \quad (1) \end{aligned}$$

根据变分原理:

$$\delta I = 0 \quad (2)$$

相应的欧拉方程为:

$$\begin{aligned} \nabla^2 PS - (\alpha_r + \alpha_g)PS/\beta = \\ - (\alpha_g PSG + \alpha_r PSR)/\beta \end{aligned} \quad (3)$$

其中 α_g, α_r 是观测权重, 事先给定, 其大小的选择与我们对资料重视程度有关, β 对 $(\alpha_r + \alpha_g)$ 的相对大小取决于对分析场的平滑约束程度。

1.2 变分约束的滤波分析

为了讨论的方便, 我们将变分前雷达观测场和雨量计观测场的谐波解表示为:

$$PSG = \tilde{A}e^{ik(x-ct)} \quad (4)$$

$$PSR = \tilde{B}e^{ik(x-ct)} \quad (5)$$

变分后的谐波解为:

$$PS = Ae^{ik(x-ct)} \quad (6)$$

则欧拉方程的一维形式为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 PS}{\partial X^2} - \frac{1}{\beta}(\alpha_g + \alpha_r)PS \\ = - \frac{1}{\beta}(\alpha_g PSG + \alpha_r PSR) \end{aligned} \quad (7)$$

记为:

$$A' = \tilde{A}\alpha'_g + \tilde{B}\alpha'_r \quad (8)$$

A' 表示变分前雨量计观测值振幅和雷达观测值振幅的加权, α'_r, α'_g 称为标准化的观测权重。其中:

$$\alpha'_r = \frac{\alpha_r}{\alpha_r + \alpha_g} \quad (9)$$

$$\alpha'_g = \frac{\alpha_g}{\alpha_r + \alpha_g} \quad (10)$$

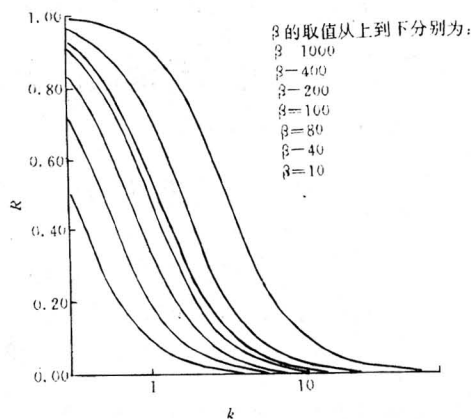
响应函数 R 表示变分后和变分前的振幅比。

$$R = \frac{A'}{A} = \frac{\alpha_r + \alpha_g}{\beta k^2 + \alpha_r + \alpha_g} \quad (11)$$

我们取 $\alpha_r = 20, \alpha_g = 80$ 作响应函数 R 随波数 k 的变化曲线(波数大波长小)。

当 β 的值小于 100 (即 $(\alpha_r + \alpha_g) : \beta < 1 : 1$), 此时 β 的滤波作用主要是对波数大于 5 个格距的短波起强烈的滤波作用, 当 β 的值为 10 时, 即 $(\alpha_r + \alpha_g) : \beta > 1 : 1$, 则对波数大于 10 个格距的波起强烈的振幅衰减作用, 从而使最后的分析场过于平滑, 导致降水测

量精度的降低。



附图 响应函数 R 随波数 k 的变化曲线

2 模拟试验

2.1 模拟站网的设计

试验中我们设计了三种不同密度的雨量站网:

(1) 取湖南省雨量站分布, 在分析区域内有 10 个雨量站, 等效雨量站密度(GGD)为: $1(\text{个雨量计})/2560(\text{km}^2)$;

(2) 第二种取每间隔 8 个格点均匀地分布一个雨量站, 分析区域内有 25 个雨量站, 等效雨量站密度(GGD)为: $1(\text{个雨量计})/1024(\text{km}^2)$;

(3) 第三种取每间隔 4 个格点(格距为 5km)均匀分布一个雨量站, 分析区域内 81 个雨量站, 等效雨量站密度(GGD)为: $1(\text{个雨量计})/400(\text{km}^2)$;

2.2 模拟雷达回波的形成

由大量的雷达观测事实表明, 回波的主要特征是内强外弱, 并呈一定梯度变化, 我们用法:

$$\begin{aligned} data_{ij} = |M_z \exp(M_i^2 + M_j^2 - M_i M_j) M_b \\ + M_a \sin(6.28 M_i / M_j) \cdot \cos(6.28 M_j / M_i)| \end{aligned} \quad (12)$$

来模拟雷达回波的初始强度场, 关于用该函数来形成回波初始场, 汤达章等也从统计方面作了说明。因此, 我们所模拟的回波具有一

般雷达回波的基本特征,是合理的。

2.3 模拟回波的真值场

我们知道:在某一时刻,雷达回波仅代表该时刻降水的空间连续分布的情况,而地面雨量计观测的降水值则是在某一点上某一个时间间隔的情况,本身在时空上不一致,因此

表1 雨量计转化的dBz值和相应的雷达回波dBz值的比较

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
雷达	30	31	41	44	51	40	42	42	49	51	25	31	51	20	19	19	61
雨量计	20	20	32	36	43	39	35	38	43	45	26	32	34	45	45	43	45

基于以上分析,我们将初估场做如下处理,使之基本上满足上述的情况。

$$MGR_{ij} = data_{ij} - ma + C_{ij} + D_{ij} \quad (13)$$

其中 MGR_{ij} 是真值场在 i, j 格点处的值, $data_{ij}$ 是初始场在 i, j 格点处的值, $C_{ij} = 6.0 \times M_r$; $D_{ij} = 30.0 / data_{ij}$; $M_r = (ci - 48)^2 + (cj - 40)^2 / 6400$; C_{ij} 主要考虑在雷达远处有效照射体积加大的订正,这种订正随距离的增大而加大,在这里的变化幅度为 0.0—0.6 之间; D_{ij} 考虑在实际测量中,当雨强较小时的误差较大而加的订正,该项的变化幅度为 0.5—5 之间, ma 是两个场之间的系统误差,加入这三项订正目的是为了造成初值场和真值场之间的差异,研究各种校正方法订正的效果。本身值的大小并不十分重要。

表2 测站稀疏时不同观测权重系数测量精度的比较

权重系数			(1/β)=0.01			(1/β)=0.001		
α_g	α_r	变分后所得的值	相对误差/%		变分后所得的值	相对误差/%		
			真值标准*	最优标准**		真值标准	最优标准	
80	20	2061	32.0	42.5				
60	40	2168	29.5	39.5				
40	60	2350	23.5	34.5				
20	80	2617	14.8	27.0				
20	100	2736	11.0	23.7				
500	500	2533	17.6	29.4	2249	5.2	37.2	
400	600	2665	13.3	25.7	2350	23.5	34.5	
200	800	4604	2.4	16.3	2617	14.8	27.0	
200	1000	3081	0.2	14.1	2736	11.0	23.7	
200	1200	3143	2.2	12.4				

* 真值标准代表我们用模拟的真值场作为真值计算的相对误差;

** 最优标准代表用模拟的初始场和模拟的测站真值经最优订正后得到的值作为真值计算的相对误差

我们有必要将空间作一定的平滑以期能和地面取得一致,即使这样,由于雷达本身的原因和降水回波的移动,使得雷达回波较强的地方而地面相应雨量计测得的雨量偏小,反之,在回波弱的地方偏大,这和我们用湖南省实际资料的分布也是相一致的(表1)。

2.4 模拟试验的结果及分析

不同观测权重系数测量精度的比较见表2、3、4,从表中可以看出:

2.4.1 当 $(\alpha_r + \alpha_g) : \beta = 10 : 1$ 时,变分结果的精度比较高;当 $(\alpha_r + \alpha_g) : \beta = 1 : 1$ 时,变分的结果由于采用了不合适的参数过分滤波,使场失掉强中心,场过于平滑。

2.4.2 测站密度加大,也意味着从地面客观分析的结果也愈为可靠,当 $\beta = 100$ 时,应该分别取 $\alpha_r = 600, \alpha_g = 400; \alpha_r = 400, \alpha_g = 600$,此时结果较为理想。

2.4.3 当 $(\alpha_r + \alpha_g) : \beta$ 的比恒定时,实际的计算结果表明,变分的结果是一致的,讨论其绝对值的大小是没有意义的,所以在实际的应用中只要考虑这种比例的大小。

表3 测站多时不同观测权重系数测量精度的比较

权重系数		(1/β)=0.01			(1/β)=0.001		
α _g	α _r	变分后所得的值	相对误差/%		变分后所得的值	相对误差/%	
			真值标准	最优标准		真值标准	最优标准
80	20	2258	26.5	37.4			
60	40	2395	22.1	33.6			
40	60	2566	16.5	28.8			
20	80	2774	9.7	23.1			
20	100	2884	6.1	20.0			
800	200	2677	12.9	25.8	2258	26.5	37.4
600	400	2799	8.9	22.4	2395	22.1	33.6
400	600	2976	3.1	17.5	2566	16.5	28.8
200	1000				2884	26.1	20.0

表4 测站密集时不同观测权重系数测量精度的比较

权重系数		变分后所得的值	(1/β)=0.01		变分后所得的值	(1/β)=0.001	
α _g	α _r		相对误差/%			相对误差/%	
			真值标准	最优标准		真值标准	最优标准
80	20	2546	17.2	24.3			
60	40	2614	15.0	22.3			
40	60	2688	12.6	20.1			
20	80	2768	10.0	17.8			
20	100	2849	7.3	15.4			
800	200	2921	5.0	13.2	2546	17.2	24.3
600	400	2994	2.6	11.1	2614	15.0	22.3
200	800	3181	3.5	5.4	2768	10.0	17.8
200	1000				2849	7.3	15.4

2.4.4 变分后的值,当用变分后的值作为“真值”与用真值计算的相对误差有10%左右的差异,但在衡量其它测量方法的精确度是一致的。因此在没有足够的地面雨量计站网作为真值标准时,我们可以考虑用最优插值订正后的值作为“相对真值”,来衡量其它测量方法的精度。

3 实测资料计算结果及分析

我们选用湖南省气象台雷达观测到的连续降水的一个时次资料和地面雨量计资料作个例计算。

雷达回波通过 $Z=200I^{1.6}$ 转化的降水量为3678(单位),经最优插值订正后的降水量为5458(单位),地面雨量站作 Brandes 客观分析后的降水量为4442(单位),再经最优插值订正后的降水量为4611(单位),表5中的真值是以稀少的雨量计估计的值,只能作为

相对的真值标准。由前面的模拟分析的结果可知,在测站稀少时,最优插值订正后的值可以作为各种校正方法的相对真值标准来衡量其它校正方法的优劣。

由表5可知,当 $(\alpha_r + \alpha_g) : \beta > 1 : 1$ 时变分的结果较为理想。所得结论是和我们模拟试验的结果相一致的。即为当 $(\alpha_r + \alpha_g) : \beta$ 比例恒定时,估算的降水量是一致的,在测站稀疏时适当提高 α_r 的值可以在一定程度上提高测量区域降水量的精度。

4 几点结论

4.1 α_g 和 α_r 的相对大小反映了分别单独用雨量计和雷达测量区域降水量的平均精度情况。当地面雨量计站网比较稠密时,我们要适当提高 α_g 的值来提高测量区域降水量的精度。

表5 湖南省不同权重系数的比较

权重系数			(1/ β)=0.01		(1/ β)=0.001		
α_g	α_r	变分后所得的值	相对误差/%		变分后所得的值	相对误差/%	
			真值标准	最优标准		真值标准	最优标准
80	20	3844	16.6	29.6			
60	40	3720	19.3	31.8			
40	60	3842	16.7	29.6			
20	80	4137	10.3	24.2			
20	100	4259	7.6	21.9			
800	200	3960	14.1	27.4	3844	16.6	29.6
600	400	3908	15.2	28.4	3720	19.3	31.8
200	800	4604	0.2	15.6	4137	10.3	24.2
200	1000	4721	2.3	13.5	4259	7.6	21.9
200	1200	4806	4.2	11.9			

4.2 $(\alpha_r + \alpha_g) : \beta$ 的相对大小,反映了变分后场对回波场和地面雨量计场的平滑作用。当 $(\alpha_g + \alpha_r) : \beta$ 的值愈大时,对短波的滤波作用愈小,在实际应用中可以适当考虑这种比值。从计算的结果来看,当二者介于10:1和1:1之间是比较合适的。

4.3 当 $(\alpha_r + \alpha_g) : \beta$ 的比值恒定时,变分的结果是一致的,在实际应用中,只需考虑其相对大小,而无需考虑其单个值的大小。

参考文献

- 1 David Atlas. Climatologically Tuned Rectified Rain Relation And Link to Area-Time Integrals J. App Meteorol. 29,1120—1990,11.
- 2 David Atlas. The Estimation of Convective Rainfall by

Area Integrals 1. The Theoretical And Empirical Basics J. Geophysical Research Vol. 90 No. 3 2135—2160 Feb,28,1990.

- 3 Daniel Rosenfeld David, Atlas And David A Short. The Estimation of convective Rainfall by Area Integrals 2. Height Rectified Threahos (HART) Method J. Geophysical Res. Vol 95 No. 3—2166 1990.
- 4 张培昌,戴铁丕,杜秉玉,汤达章. 雷达气象. 北京:气象出版社.
- 5 张培昌等. 大气科学,1992,16(2):248—256.
- 6 林炳干. 用最优化方法求 Z-I 关系和数字化天气雷达测量区域降水量方法. 南京气象学院硕士研究生毕业论文.
- 7 汤达章,李力. 一种新的跟踪雷达回波的特征量——矩不变量. 南京气象学院学报,1989,12(3):1—8.

Selecting of Three Parameters in Euler Equation and Accuracy of Area Precipitation Measurement by Weather Radar

Li Jiantong

(Xiamen Meteorological Office, 361012)

Zhang Peichang

(Nanjing Institute of Meteorology, 210044)

Abstract

According to simulation data and observed data, both physical implication and selecting principles of three parameters in Euler equation are discussed. The result shows that there is a relationship between these parameters and precision. It provides a reference for improving accuracy of area precipitation measurement from weather radar through variational method.

Key Words: variational method area precipitation measurement Euler equation weather radar