

一阶 Butterworth 递归式带通滤波器技术改进方案¹⁾

陈寅生

欧阳玫君²⁾

(南京气象学院, 南京 210044) (江苏省气象台)

提 要

把一阶 Butterworth 递归式(FBR)带通滤波器应用于滑动样本, 输出序列出现了振幅和位相的相对误差。为了克服这种现象给制作中长期预报带来的困难, 作者通过数值试验, 分析了该滤波器的误差传递特性, 并设计了“拟定初值的三步滤波方案”。大量试验表明, 该方案可较为有效地抑制输出序列的误差和位相飘移。

关键词: 一阶 Butterworth 递归式 带通滤波器 误差传递 位相飘移

1 两类滤波输出误差

一阶 Butterworth 递归式(FBR, 下同)带通滤波器, 有两个主要优点: 第一, 相对输入序列而言, 输出序列长度几乎不损失; 第二, 收敛速度快, 而且截断频带内中心频率附近的振幅几乎不削弱^[1]。所以, 这种滤波器近年来已在国内外大气低频振荡研究和中长期预报技术中受到日益广泛的重视^[2]。

制作中长期预报通常使用滑动样本, 即取样过程中, 样本向前滑动, 但所取样本总长度保持不变。图 1 给出利用该滤波器对 1995 年 9 月 21 日—11 月 28 日南京日平均气压 (p_B), 进行 15—25 天滤波的结果, 计算中进行了一次滑动, 所取样本总长度保持为 60 天, 显见, 两条曲线样本重叠部分的位相并不完全一致, 在曲线的末端, 甚至出现了相反的位相, 图 2a 是同一份资料 10—16 天滤波结果的末端, 计算中进行了两次滑动, 所取样本总长度也是 60 天, 滑动两次后, 位相飘移长

达 4 天。大量的实践表明, 出现这种误差和位相飘移具有一定的普遍性。显然, 应用这种滤波器制作中长期预报, 结论是无法确定的。

从理论上讲, FBR 带通滤波器是没有位相飘移的^[1,3], 但应用于滑动样本却暴露出明显的相对误差和位相飘移, 我们称之为假性位相飘移, 是由于滤波误差造成的。分析表明, 出现在输出序列的开端部分和末尾部分的假性位相飘移的原因和特点是不同的, 我们称前者为开端误差, 后者为末端误差。

2 FBR 带通滤波器的误差传递特性

FBR 带通滤波器可以写成^[1]:

$$y_k = a(x_k - x_{k-2}) - b_1 y_{k-1} - b_2 y_{k-2} \quad (k = 3, 4 \cdots n) \quad (1)$$

$$a = \frac{2\Delta\Omega}{4 + 2\Delta\Omega + \Omega_0^2} \quad (2)$$

$$b_1 = \frac{2(\Omega_0^2 - 4)}{4 + 2\Delta\Omega + \Omega_0^2} \quad (3)$$

$$b_2 = \frac{4 - 2\Delta\Omega + \Omega_0^2}{4 + 2\Delta\Omega + \Omega_0^2} \quad (4)$$

1) 本文受中国气象局资助。

2) 严明良参加输出序列的图形显示程序的改进工作。

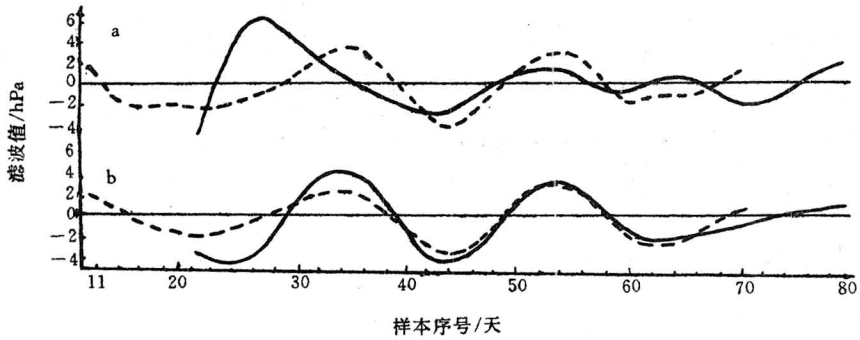


图1 1995年9—11月南京P_日 89个样本15—25天周期滤波输出曲线
a: 二步滤波方案, b: 改进后的三步滤波方案
虚线为首次滤波输出曲线, 实线为将样本向后滑动10天的滤波输出曲线

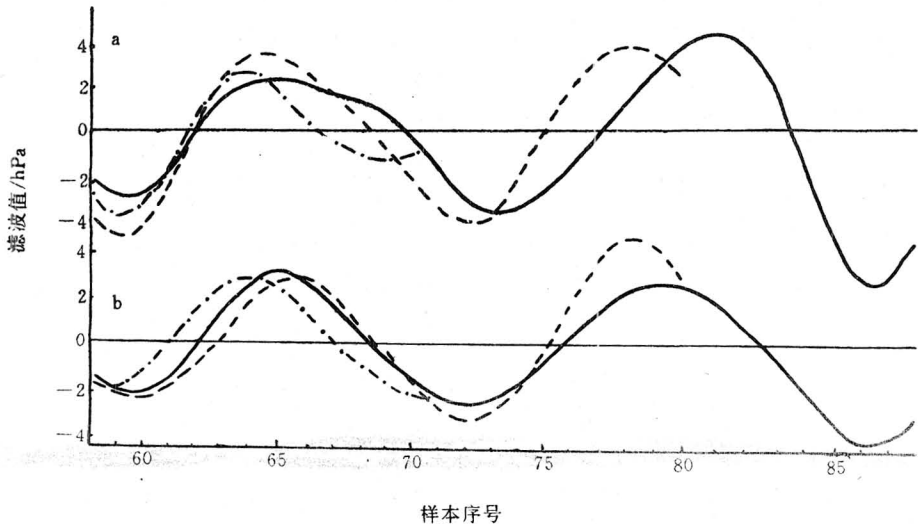


图2 10—16天周期滤波输出曲线
a: 二步滤波方案结果, b: 改进后的三步滤波方案
点划线为首次滤波曲线的末端, 虚线为将样本向后滑动10天的滤波曲线的末端, 实线为将样本向后滑动19天的滤波曲线的末端

$$\text{式中 } \Delta\Omega = 2 \left| \frac{\sin(\omega_1 \Delta T)}{1 + \cos(\omega_1 \Delta T)} - \frac{\sin(\omega_2 \Delta T)}{1 + \cos(\omega_2 \Delta T)} \right| \quad (5)$$

$$\Omega_0^2 = \frac{4 \sin(\omega_1 \Delta T) \cdot \sin(\omega_2 \Delta T)}{[1 + \cos(\omega_1 \Delta T)] \cdot [1 + \cos(\omega_2 \Delta T)]} \quad (6)$$

其中, x_k 为输入序列, y_k 为输出序列, 初始输出 y_1, y_2 任意尝试性选取, 通常取 $y_1 = y_2 = 0$ 或 $y_1 = x_1, y_2 = x_2$ 。 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ 分别为截

止频率, T_1, T_2 为周期, $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ 称为几何中心频率, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 称为中心波长。FBR 带通滤波器的传递函数为:

$$W(z) = \frac{a(1 - z^2)}{1 + b_1z + b_2z^2} \quad (7)$$

由式(1)可以清楚地看出,在递归滤波的过程中,过去的输出误差不仅影响当前的输出,而且要影响以后的输出,我们称这种特性为误差的传递特性。

递归滤波的误差有3种:第一是计算过程中的舍入误差。由于现代电子计算机的精度很高,所以这种误差可以忽略不计,第二是递归滤波开端两个值 y_1 和 y_2 的任意尝试性选取所带来的误差。这种误差通常是不可避免的,我们称之为开端误差。

设输入序列 $x_k=0$,则由式(1)可以得到输出序列的误差 ϵ_k ,其表达式为:

$$\epsilon_k = -b_1\epsilon_{k-1} - b_2\epsilon_{k-2} \quad (k = 3, 4, \dots, n) \quad (8)$$

为了考察不同的开端误差 ϵ_1, ϵ_2 向后传递的特性,我们用式(8)分别对4种不同的 ϵ_1 和 ϵ_2 的组合,计算这些开端误差向后传递和衰减的过程。图3是4种不同的 ϵ_1, ϵ_2 组合所造成的误差传递和衰减过程的数值试验结果。由图3中的4条曲线我们可以看出3个特点:(1)开端误差以 T_0 为周期向后呈阻尼振动并很快衰减;(2)误差向后传递约 $2T_0$ 的距离,开端误差愈长则向后传递愈远;(3)开端误差 ϵ_1 与 ϵ_2 的组合不同,则误差向后传递

的位相形式也不同,由此可见,FBR带通滤波器的两个开端误差的任意性,将会对开端 $(1-2)T_0$ 距离中的输出结果的可靠性产生相当大的影响,表现在滑动后的样本开端 $(1-2)T_0$ 距离输出结果与滑动前样本不吻合。第3种递归滤波的误差是其它频谱成分对所选频带的混淆干扰。做带通滤波希望所选择频带内的波动尽可能不衰减或少衰减,而其它频谱成分则应被大大削弱和衰减。当其它频谱成分在输入序列中占有很大比重时,它们必然会因为滤波器对它们削弱不够而混入以后的输出序列之中,对输出序列构成误差干扰。实际上,输出序列中常常混入其它频谱成分,只要它们的比重不很大,由于这些成分的位相随机性和FBR带通滤波器的快速收敛性,使得它们在传递过程中常常正负抵消,误差干扰自行抑制,不产生明显的位相漂移,所以在输出序列的中部,不同的滑动样本几乎都是一致的,在输出序列的末尾部分的情形则有所不同,误差传递过程中,正负抵消的机会减少了,所以愈接近末尾,位相飘移也愈明显(见图1a,2a)。大量的数值试验表明,这种末端误差较开端误差要小得多。但是输出序列的末端是我们赖以制作天气预报的重要依据,所以抑制末端误差更为必要。

3 通常的FBR带通滤波器误差的抑制方案

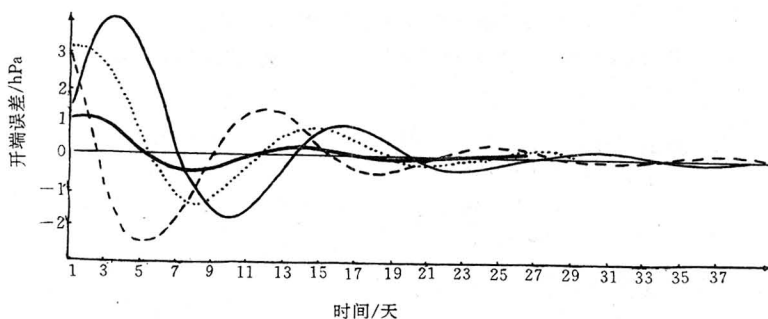


图3 4种不同的开端误差 ϵ_1 与 ϵ_2 的传递和衰减

粗实线为 $\epsilon_1=\epsilon_2=1$;点线为 $\epsilon_1=\epsilon_2=3$;断线为 $\epsilon_1=3, \epsilon_2=1$;细实线为 $\epsilon_1=1, \epsilon_2=3$

Shanks 在 1967 年提出分两步进行的滤波方案^[1]: 第一步, 设输出序列初始输出 $y_1 = y_2 = 0$, 应用式(1)对输入序列按正的时间方向进行一次滤波(即正向滤波), 并把输出序列称为尝试性输出。第二步, 对尝试性输出序列按相反的时间方向再施行一次滤波(即反向滤波), 从而得到最终的输出序列。这个二步滤波方案至今仍被沿用(以下简称二步方案)。图 1a、2a 均是用二步方案滤波得到的结果, 由图可见, 该方案仅对抑制输出序列中部的误差传递有效, 对开端误差和末端误差的抑制效果很不理想。表现在两个滑动样本输出序列的中部大致重合, 而开端和末端部分相互分离, 尤其是末端的位相可以相差 3 天以上。这是因为接近输出序列末端的一些输出值, 在经过一次正向滤波之后, 还包含着相当多的前续点的误差干扰, 而且愈接近输出序列的终点 y_n , 这种误差被反向滤波所衰减的机会愈少, 因而, 所包含的误差也愈大。所以输出序列接近终点的一些输出值的可靠性也就愈差, 实际上, 终点处 y_{n-1} 和 y_n 这两个输出值, 完全没有被反向滤波处理, 这就导致反向滤波对末端误差的抑制效果不理想。

4 拟定初值的三步滤波方案

为了克服二步方案的上述缺点, 使 FBR 带通滤波器较好地应用于滑动样本, 满足中长期预报业务的需要, 本文设计了“拟定初值的三步滤波方案”。其要点如下: (1) 原始资料

$$H(\omega) = \left| \frac{4a^2 \sin^2(\omega\Delta T)}{1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1(1 + b_2)\cos(\omega\Delta T) + 2b_2\cos(2\omega\Delta T)} \right|^{3/2} \quad (9)$$

图 4 给出二步和三步滤波方案的振幅频率响应函数曲线, 它们的截断波长都是 $T_1 = 10$, $T_2 = 18$, $T_0 = \sqrt{T_1 T_2} = 13.42$ 。需要指出的是, 两种滤波方案在同一截断波长处的振幅衰减率不同, 同样的振幅衰减率在两种滤波方案中都可以对应不同的波长。因此, 当使用

的样本长度大于 $4T_0$, 以保证输出序列末端的准确性。全部滤波过程分四步进行。(2) 第一步对原始序列施行反向滤波, 由此拟定出 y_1 和 y_2 两个开端输出值。(3) 用已拟定出的 y_1 和 y_2 两个开端输出值, 对原始序列施行二步方案, 即对原始序列施行正、反两步滤波。(4) 对所得输出序列再施行一次正向滤波。本方案相对二步方案有两点改进: (1) 开端输出初始的 y_1 和 y_2 值是由第一步反向滤波得到的, 称为拟定的初值输出, 不是任意的。而二步方案中的 y_1 和 y_2 是任意选取的(通常取 $y_1 = y_2 = 0$ 或 $y_1 = x_1, y_2 = x_2$)。这样改进的目的在于加强对开端误差的抑制。(2) 本方案在拟定初值的基础上, 执行二步方案之后, 再增加一次正向滤波, 能更好地抑制末端误差。

图 1b 和 2b 与图 1a 和 2a 用的是同一份资料, 是施行“拟定初值的三步滤波方案”的结果。对比图 1b 和 1a, 2b 和 2a, 不难发现, 本文设计的三步滤波方案, 在有效地抑制末端误差的同时, 对开端误差也有所抑制。

5 三步滤波方案的频率响应

FBR 带通滤波器从理论上讲没有位相飘移, 且输出的响应函数可由它的系统函数施行 z 变换得到。对于本文设计的三步滤波方案:

令 $z = e^{-i\omega\Delta t}$, 并将其代入式(7), 可得输出序列的振幅频率响应函数为:

三步滤波方案时, 应据式(9)去选择合乎需要的带通波段, 以保证所需要频带的能量不被削弱的太多而失去信息。应该指出, 式(9)所表示的频率响应函数是一个单纯的理论估计, 它对实际滤波无疑是具有理论指导意义的。同时也应指出, 根据波谱分析中的采样定理、窗函数原理以及混频效应可知, 任何实际

的滤波器对所通过的任何频带都有不同程度的削弱作用,这一点,是在实际滤波中应该注意的^[4]。因此,从波谱分析理论考虑,不可任意增加滤波的步数(次数),以免信号能量损失。

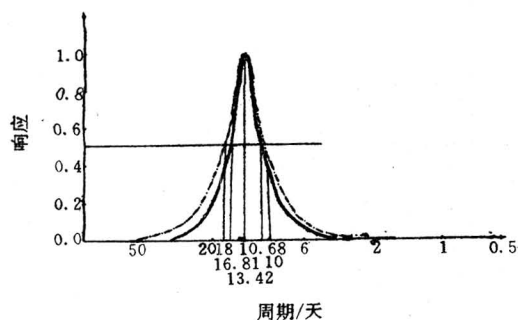


图4 FBR带通滤波器二步与三步方案的响应曲线对比
实线为三步,虚线为二步

6 结论

6.1 一阶 Butterworth 递归式(FBR)带通滤波器主要有两种滤波误差,输出序列的开端误差和末端误差,它们的存在与滤波器的误

差传递特性有关。

6.2 常用的FBR带通滤波器应用于滑动样本时,输出序列的末端误差造成的位相飘移对中期天气预报的准确性产生影响。

6.3 在二步方案的基础上,设计的拟定初值的三步滤波方案,能抑制输出序列的误差,特别是对抑制末端误差更为有效。大量计算表明,三步滤波方案能将输出序列的末端误差造成的位相飘移,抑制在0—1天之内,为中期预报所允许的范围内。因此,该方案较二步方案有更强的应用性。

参考文献

- 1 Murakami, M. . Large-scale aspects of deep convective activity over the GAE area. Mon. Wea. Rev. , 1979, 107, 994—1013.
- 2 孙国武等. 青藏高原大气低频变化的研究. 北京:气象出版社,1992.
- 3 Krishnamurti, T. N. , Subramaniam, M. , Osterhof, D. K. and Daughenbaugh, G. Predictability of low frequency modes. Meteorol. atmos. phys. , 1990, 44: 63—83.
- 4 郑治真. 波谱分析基础. 北京:地震出版社, 1979: 77—100, 157—167.

The Technical Advancement of the Recursive Bandpass Filter with the First-order Butterworth Function

Chen Yinsheng

(Nanjing Meteorological Institute, 210044)

Ouyang Meijun

(Jiangsu Meteorological Observatory)

Abstract

By applying recursive bandpass filter based on the first-order Butterworth function to running samples, the relative amplitude and phase errors in the output sequence from those running input data are found. The propagation property of the errors in the output is analysed. To suppress the errors of the output, the "three steps recursion technique with developing initial output" procedure has been developed. A lots of tests show that this procedure can suppress the errors and phase shift in the output effectively.

Key Words: recursive bandpass filter first-order Butterworth function error propagation phase shift