卡尔曼滤波方法在天气预报中的应用

陆如华　　　　何于班

（国家气象中心，北京　100081）　（北京应用气象研究所，100029）

提　要

从气象应用角度介绍了卡尔曼滤波的基本原理及其递推算法。为了说明卡尔曼滤波递推算法的应用方法，制作了北京1993年1月份逐日最低气温36小时预报。预报结果令人满意，表明该方法很有实用价值，与MOS方法相比，它的优点是不需要收集大样本历史资料，因此，它容易适应数值预报模式的变化。

关键词： 卡尔曼滤波　随机动态系统　递推算法

引　言

MOS预报方法在我国广大气象台站已经得到广泛应用，是预报员们都熟悉的数值产品释用方法。MOS方法是建立在数值预报模式产品基础上的，当今，数值预报技术不断发展，数值天气预报模式经常变化，有可能破坏MOS预报方程的统计基础。因此，寻求一个能适应数值预报模式经常变化的统计方法是十分必要的。卡尔曼滤波方法就是具有这种特点的重要方法。目前，这个方法在我国天气预报中尚未得到广泛应用，为此，本文将介绍它的基本原理及其在天气预报中的应用方法。

1　基本原理

1.1　滤波的基本思想

在日常实际问题中，往往得到的是一系列带有误差的实际量测，需要排除误差的干扰，分离出所需要的物理参数的估计值，并使估计值的误差达到最小，这就是滤波的基本思想。从数学上讲，滤波是一种统计估计方法，通过对一系列有误差的实际量测数据的处理，可得到所需要的物理参数的最佳估计值。滤波这一有效方法已在通讯、飞行导航等方面得到广泛应用。预报员经常会遇到预报与实况存在着不同程度的误差，即使建立了一个较好的客观预报方法，在投入日常预报业务之后，预报误差大小变化也会给预报员使用造成困难。为此，我们设法运用滤波的基本思想，利用前一时刻预报误差的反馈信息，及时修正预报方程，以提高下一时刻的预报精度，这就是滤波在天气预报中应用的基本思想。与MOS方法相比，卡尔曼滤波方法不仅不要求有足够的数值预报产品的历史资料，而且可利用前一次预报误差反馈信息来修正方程，因此，有广泛的应用前景。

1.2　滤波的基本方法

假定我们滤波的对象构成了一定形式的随机动态系统，并以这个随机动态系统为基础进行递推滤波，为此，下面介绍随机动态系统的组成及递推滤波方法。

1.2.1　随机动态系统的组成

我们只讨论简单的离散时间的线性随机动态系统，它由状态方程(1)及量测方程(2)组成。

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \tag{1}$$

$$Y_t = X_t\beta_t + v_t \tag{2}$$

状态方程(1)描述了随机动态系统的状态随时间变化的规律，通过状态方程，可从$t-1$

时刻的状态随机向量 β_{t-1}，估计出下一时刻 t 的状态随机向量 β_t。从 $t-1$ 时刻准状态变化到 t 时刻状态的过程中，状态随机向量的变化(即从 β_{t-1} 变化到 β_t)要受到随机扰动 ε_{t-1} 的影响，这种随机扰动称之为动态噪声，其均值为零，方差为 W，设 $\varepsilon_t \approx N(0,W)$。

量测方程(2)描述了不同时刻的状态与所获得的量测之间的关系，也就是说，量测方程描述了状态变量 β_t 与量测变量 Y_t、X_t 之间的关系，同时，这种关系要受到量测噪声(v_t)的影响。量测噪声的均值为零，方差为 V，设 $v_t \approx N(0,V)$。

1.2.2 卡尔曼滤波的递推方法

我们可用上述两组方程来描述天气预报的问题：量测方程(2)可视为回归模型，其中 Y_t 为预报量，X_t 为预报因子，通常可由数值预报产品提供，β_t 为回归系数。若预报量 Y_t 有 n 个分量的话，则 Y_t 是 n 维向量；预报因子 X_t 是 $n \times m$ 矩阵；β_t 是 m 维向量，可用下列数学表达式表示：

$$Y_t = [y_1, y_2, \cdots y_n]_t^{\mathrm{T}}$$

$$X_t = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}_t$$

$$\beta_t = [\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m]_t^{\mathrm{T}}$$

相应地，v_t 是 n 维随机向量，ε_t 是 m 维随机向量，并假定这两个随机向量是互不相关的均值为零的白噪声。

根据上述对 v_t、ε_t 的假定，按照广义最小二乘原理，可以推导出下列卡尔曼滤波递推公式。本文不讨 论它的推导过程，只讨论它的意义及应用。

卡尔曼滤波递推公式如下：

$$\hat{Y}_t = X_t b_{t-1} \tag{3}$$

$$R = C_{t-1} + W \tag{4}$$

$$\sigma = X_t R X_t^{\mathrm{T}} + V \tag{5}$$

$$A = R X_t^{\mathrm{T}} \sigma^{-1} \tag{6}$$

$$b_t = b_{t-1} + A(Y_t - \hat{Y}_t) \tag{7}$$

$$C_t = R - A\sigma A^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

式(3)就是预报方程，其中 $\hat{Y}_t$ 为预报值，X_t 为预报因子，b_{t-1} 为回归系数，是 β_{t-1} 的估计值。重要的是确定起始时刻的回归系数(b_0)，这通过求回归系数估计值方法得到。

式(4)中的 C_{t-1} 为 b_{t-1} 的误差方差阵，它的初始值(C_0)可假定为零矩阵；W 是式(1)中 ε 的方差矩阵，可用样本资料估算 β 的变化得到。

式(5)中的 σ 是预报误差方差阵，R 为递推值 b_t 的误差方差阵，X_t^{T} 是 X_t 的转置矩阵，V 是式(2)中 v 的方差矩阵，从回归分析的残差求得。

式(6)的 A 是增益矩阵，σ^{-1} 是 σ 的逆矩阵。

式(7)中的 Y_t 是预报量的实际观测值。

式(7)和式(8)是根据预报误差递推下一步的 b_t、C_t 值。

从式(3)—(8)反复运算，就可以在做预报的同时，对预报方程中的系数 b 进行修正，这正是卡尔曼滤波方法区别于 MOS 预报方法的重要之处。MOS 方程一旦建立之后，方程中的回归系数是不随制作预报而改变的。

2 卡尔曼滤波在天气预报中的应用实例

前面已给出了一组卡尔曼滤波的递推公式，下面我们通过制作北京1993年1月份逐日最低气温36小时预报实例，来说明如何应用这个方法。

卡尔曼滤波方法适用于预报量为连续变量如最高、最低气温、湿度、露点等，而不适用于不连续变量如降水、雷暴等。为此，我们选了北京最低气温为预报对象，仅仅使用了少量的历史样本资料即1992年11月和12月 $T_{42}L_9$ 模式的数值预报产品，运用了前面介绍的卡尔曼滤波递推公式，制作了1993年1月份北京逐日最低气温36小时预报，取得了令人鼓舞的结果。

2.1 确定递推起步参数

首先要确定4个递推起步参数 b_0、C_0、W、

V，这至关重要。然而，直到今天，却没有成熟的令人置信的客观计算方法，尚需人们进一步探讨。

选用了北京1992年12月份 T_{42} L_9数值模式的逐日48小时预报产品中的1000hPa 温度及850hPa 温度、比湿和风的 v 分量作为预报因子，用多元回归方法建立了北京最低气温36小时预报方程，这4个预报因子的系数作为卡尔曼滤波递推起步参数 $\boldsymbol{b}_0$即

$$\boldsymbol{b}_0 = [-10.770 \quad 0.20387 \quad -0.23044 \quad 3.4218 \quad -0.15538]^T$$

$\boldsymbol{C}_0$是$\boldsymbol{b}_0$的误差方差阵，在此，认为$\boldsymbol{b}_0$是精确的，则$\boldsymbol{C}_0$是零矩阵：

$$\boldsymbol{C}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

确定 $\boldsymbol{W}$ 比较困难，有的用经验方法主观确定。在此，我们用同样的方法建立了北京11月份的回归方程。根据这两个月的回归方程中的回归系数的变化进行估算，确定了 $\boldsymbol{W}$ 矩阵：

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1.1909 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00579 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02015 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0.19512 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0056 \end{bmatrix}$$

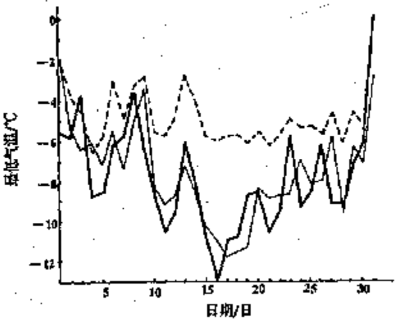
V 值是从建立12月份回归方程时得到的残差而确定的，即

$$V = 2.4458$$

确定了递推起步的这4个参数值之后，按递推公式(3)—(8)，可得到每一步预报量及 $\boldsymbol{b}_t$、$\boldsymbol{C}_t$，我们推算了一个月，得到了附图所示的1993年1 月份北京逐日36小时最低气温预报。

2.2 结果分析

如附图所示，1993年1月份北京冷空气活动比较频繁，其中有3次较强冷空气活动，分别出现在3—5日，8—11日及13—16日。预报与实况相比，两者的变化趋势很一致，其中8—11日及13—16日这两次冷空气活动预报得十分精彩，一个月预报的均方根误差为1.68℃。为了进一步考查卡尔曼滤波方法，用前面提到的12月份回归方程制作北京36小时最低气温预报（图中虚线），其预报精度明显不如卡尔曼滤波方法，其均方根误差达到3.45℃。这表明了使用短样本资料建立的回归方程，其系数不随时修正的话，其预报效果明显不如卡尔曼滤波方法好。



附图 1993年1月逐日最低气温卡尔曼滤波36小时预报

粗实线：实况 细实线：卡尔曼滤波法预报

虚线：回归方法36小时预报

3 存在问题

确定卡尔曼滤波递推起步的4个参数值($\boldsymbol{b}_0$、$\boldsymbol{C}_0$、$\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{V}$)是关系到应用该方法成败的关键。而目前尚没有统一的成熟的方法，要靠我们在应用中不断探索，总结应用中的经验。作者将在另文专题讨论这个问题。

参考文献

1 Persson, A. Kalman filtering—— A new approach to adaptive statistical interpretation of numerical meteorological forecasts. Lectures and papers presented at the WMO training workshop on the interpretation of NWP products in terms of local weather phenomena and their verification, Wageningen, The Neatherlands, 29 July—9 August 1991. Programme on short-and medium-range weather prediction research report series no. 34. XX-27-XX-32. 1991.

（下转40页）

（上接43页）

The Application of Kalman Filter in Weather Forecasts

Lu RuHua He Yuban

(National Meteorological Center, Beijing 100081) (Beijing Institute of Meteorological Application, 100029)

Abstract

The principle of Kalman filter (KF) and the recursive algorithm of KF are introduced from the view point of meteorological applications. In order to describe the application of the recursive algorithm of KF, a daily minimum temperature up to 36h ahead has been made for Beijing city for the period from 1 to 30 Jan. 1993. The results are satisfactory and approve that the method of KF is mostly practical. The advantages of KF compared to that of MOS method are that one do not have to collect large historical data. So KF will adapt easily to numerical weather prediction model changes.

Key Words: Kalman Filter method random dynamic system recursive algorithm