

球面三维空间中任意截剖 方向的垂直剖面图设计原理

张绍晴 刘还珠

(国家气象中心,北京 100081)

提 要

设计出一种球面三维空间中任意截剖方向的垂直剖面图。该图适合于计算机自动化数值分析,能准确表达系统任意截面的垂直结构(标量、矢量及其配置)。

关键词: 设计原理 任意方向 垂直剖面

引 言

在分析天气系统时,往往需要绘制任意截剖方向的垂直剖面图,以便获得锋面或风暴轴等系统的垂直结构。通常是采取十分近似的方法,即略去球面效应,仅取截面所在各垂直层交线附近的值作为剖面各层的近似。这种取值的方法,一方面精度不高,另一方面将会使获得的垂直剖面所表达的系统结构出现失真现象。随着数值分析和自动化技术在气象科研和业务中的发展,设计一种精确表达系统任意截面垂直结构的剖面图显得十分必要。本文阐述剖面网格的设计和产生,和有关这种剖面上的分辨率、插值和矢量投影问题,并给出几种图形示例。

1 剖面网格的设计和产生

该剖面网格总的设计思想是,将剖面起迄点在球面上所夹大圆弧进行 N 等分,每一分点为一个网格点,问题的关键是要定出分点处的经纬度坐标¹⁾(见图 1)。

1) 对于有限区经纬度网格,只要剖面起始点在区域内,本设计照样适用。对于有限区正方形网格,直线等分点的坐标与直线长度之间满足三角关系,插值很容易进行,不在本设计原理的讨论范围。

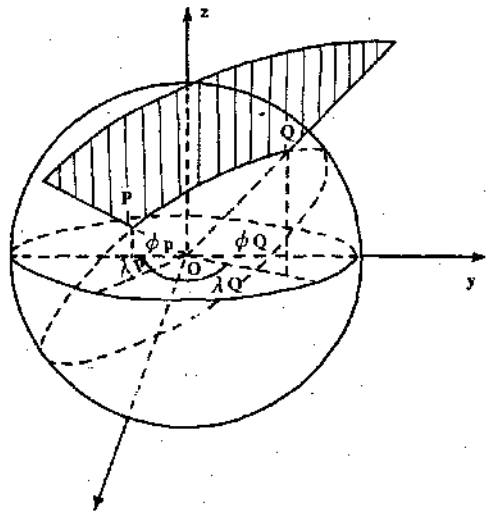


图 1 剖面设计示意图

1.1 剖面所含大圆弧长

设剖面在球面的起迄点分别为 P, Q , 其经纬度坐标分别为 $P(\lambda_P, \varphi_P), Q(\lambda_Q, \varphi_Q)$, P, Q 两点在图 1 所示直角坐标系中的坐标分别为:

$$P: \begin{cases} x_P = R \cos \varphi_P \cos(\lambda_P - \frac{\pi}{2}) = R \cos \varphi_P \sin \lambda_P \\ y_P = R \cos \varphi_P \sin(\lambda_P - \frac{\pi}{2}) = -R \cos \varphi_P \cos \lambda_P \\ z_P = R \sin \varphi_P \end{cases}$$

$$Q: \begin{cases} x_Q = R \cos \varphi_Q \cos(\lambda_Q - \frac{\pi}{2}) = R \cos \varphi_Q \sin \lambda_Q \\ y_Q = R \cos \varphi_Q \sin(\lambda_Q - \frac{\pi}{2}) = -R \cos \varphi_Q \cos \lambda_Q \\ z_Q = R \sin \varphi_Q \end{cases}$$

PQ 的弦长满足: $\overline{PQ}^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2$ 代入坐标值, 并展开整理得:

$$\overline{PQ}^2 = 2R^2 [1 - 2 \cos \varphi_P \cos \varphi_Q \cdot \cos(\lambda_P - \lambda_Q) - \sin \varphi_P \sin \varphi_Q] \quad (1)$$

在 $\triangle OPQ$ 中, $\angle POQ$ 为弧 PQ 所对应的圆心角, 用 α 表示, 由三角形余弦定理可求得角 α 。则 PQ 弧长为:

$$PQ = \alpha \cdot R = R \arccos [\cos \varphi_P \cos \varphi_Q \cdot \cos(\lambda_P - \lambda_Q) + \sin \varphi_P \sin \varphi_Q] \quad (2)$$

设剖面水平网格将弧 PQ 均匀分为 N 等分, 分点依次为 $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$, 第 i 个分点 P_i 处与 OP 所夹圆心角为:

$$\alpha_i = \frac{i\alpha}{N} \quad (3)$$

1.2 剖面所在大圆面与赤道平面的夹角 β

过 P、Q 两点的大圆面过球心 $(0, 0, 0)$, 用平面方程的三点式可写出该大圆面(以下简称面 OPQ)的平面方程:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_P & y_P & z_P \\ x_Q & y_Q & z_Q \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

代入 P、Q 的坐标, 整理后设定:

$$\begin{cases} p = \sin \varphi_P \cos \varphi_Q \cos \lambda_Q - \cos \varphi_P \sin \varphi_Q \cos \lambda_P \\ q = \sin \varphi_P \cos \varphi_Q \sin \lambda_Q - \cos \varphi_P \sin \varphi_Q \sin \lambda_P \\ r = \cos \varphi_P \cos \varphi_Q \sin(\lambda_P - \lambda_Q) \end{cases} \quad (5)$$

则平面 OPQ 的方程为:

$$p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z = 0 \quad (6)$$

p, q, r 为平面 OPQ 的法线方向数, 赤道平面的法线为 z 轴, 由两平面的交角及平面法线的定义知, 两平面的交角即为两平面法线的交角, 又由空间中直线方向数的定义, 可求得面 OPQ 与赤道面的交角为:

$$\cos \beta = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \quad (7)$$

大圆 OPQ 与赤道相交于两点, 其中某点的经度是另一点的经度与 π 之和, 设 L 点经度为 λ_L , 该点满足式(6), 并且有 $z_L = R \sin \varphi_L = 0$, 则由式(6)得: $p \sin \lambda_L - q \cos \lambda_L = 0$, 故:

$$\operatorname{tg} \lambda_L = \frac{q}{p} \quad (8)$$

在三维气象图形图象显示中, 若预先给定截面与赤道面的夹角 β , 则可省略以上各步, 并由以后式(11)求 λ_L 。

1.3 大圆 OPQ 上圆心角与地球经纬度的关系

如图 2 所示, 过 P、Q 两点间任一分点 P_i 作赤道平面的垂线, 垂足为 H, 过 P_i 点作面 OPQ 与赤道面交线 l 的垂线, 垂足为 F, FH 为 $P_i F$ 在赤道面上之投影, 且平面 $OP_i H$ 是过 P_i 点的经圈平面。由经纬度之定义及两平面夹角之定义, 可得到这样一些角度关系: $\angle LOP_i$ 为 LP_i 所对应的圆心角, 设为 γ_{P_i} , 而 $\angle P_i F H = \beta$, $\angle HOP_i = \varphi_{P_i}$, $\angle HOF = \angle HOE - \angle LOE = \lambda_P - \lambda_L$, 并注意到 $\angle OFP_i, \angle OHP_i, \angle OFH$ 和 $\angle FHP_i$ 均为直

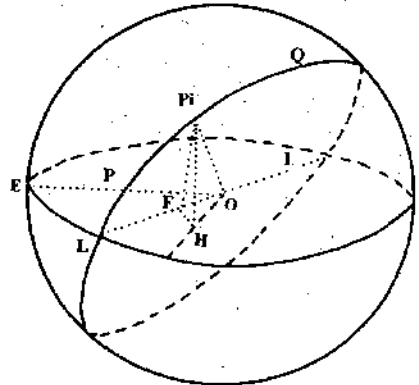


图 2 剖面所在大圆与赤道面的关系示意图

角, 则可得关系式:

$$\begin{cases} P_i F = R \sin \gamma_{P_i} \\ F H = P_i F \cos \beta \\ F H = O F \operatorname{tg}(\lambda_P - \lambda_L) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} P_i H = R \sin \varphi_i \\ P_i H = P_i F \sin \beta \end{cases} \quad (10)$$

由式(9)和(10)可得:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\lambda_{P_i} - \lambda_L) = \operatorname{tg} \gamma_{P_i} \cos \beta \\ \sin \varphi_{P_i} = \sin \gamma_{P_i} \sin \beta \end{cases} \quad (11)$$

OP 与 OL 所夹的圆心角 γ_P 满足: $\sin \varphi_P = \sin \gamma_P \sin \beta$, 即:

$$\gamma_P = \arcsin \left(\frac{\sin \varphi_P}{\sin \beta} \right) \quad (12)$$

P_i 与 L 所夹圆心角 γ_{P_i} 为:

$$\gamma_{P_i} = \gamma_P + \frac{i \cdot a}{N} \quad (13)$$

可得 P_i 处的经纬度分别为:

$$\begin{cases} \lambda_{P_i} = \arcsin(\operatorname{tg} \gamma_{P_i} \cos \beta) + \arcsin(\operatorname{tg}(q/p)) \\ \varphi_{P_i} = \arcsin(\sin \gamma_{P_i} \sin \beta) \end{cases} \quad (14)$$

2 分辨率、插值和矢量投影

2.1 垂直剖面水平分辨率 N

垂直剖面的水平分辨率原则上可根据需要任意给出,但由于所给出的三维资料具有一定的分辨率, N 值太大浪费机时, N 值太小会造成剖面线条的失真。这儿推荐一种 N 值取法:

设所给经纬度网格的网格距为 $\Delta \lambda$ 和 $\Delta \varphi$, 则 N 值取:

$$N = \operatorname{INT} \left[\frac{PQ}{R \sqrt{\Delta \varphi^2 + \cos^2 \frac{(\varphi_P + \varphi_Q)}{2} \Delta \lambda^2}} \right] + 1 \quad (15)$$

2.2 插值

当剖面网格的坐标确定后,可以用任何插值方案来进行插值,以后展示的图形示例,是用双线性插值取得剖面网格上的资料。

$$A_{P_i} = \left[\frac{(y_{j+1} - y_{P_i})}{(y_{j+1} - y_j)} A_{I,j} + \frac{(y_{P_i} - y_j)}{(y_{j+1} - y_j)} A_{I,j+1} \right] + \left[\frac{(x_{I+1} - x_{P_i})}{(x_{I+1} - x_I)} + \left[\frac{(y_{j+1} - y_{P_i})}{(y_{j+1} - y_j)} A_{I+1,j} \right. \right.$$

$$\left. + \frac{(y_{P_i} - y_j)}{(y_{j+1} - y_j)} A_{I+1,j+1} \right] \frac{(x_{P_i} - x_I)}{(x_{I+1} - x_I)} \quad (16)$$

2.3 矢量投影

欲将一个三维矢量投影到已经产生好的垂直剖面网格上,应首先将矢量的三个分量按标量插值到剖面网格上,插值所得到的垂直分量即为剖面网格上的矢量垂直分量,插值所得到的水平分量还需进行投影才构成剖面上的矢量水平分量。

利用空间曲线上切线的交面式方程:

$$\frac{x - x_0}{F_{y_0} F_{x_0}} = \frac{y - y_0}{F_{x_0} F_{y_0}} = \frac{z - z_0}{F_{x_0} F_{y_0}} \quad (17)$$

P_i 处纬圈的曲线交面方程为:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \\ \Phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 \cos^2 \varphi_{P_i} \end{cases} \quad (18)$$

P_i 处剖面所在大圆的曲线交面方程为:

$$\begin{cases} F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \\ \Phi_2(x, y, z) = px + qy + rz \end{cases} \quad (19)$$

通过式(18)、(19)计算 F_1, Φ_1, F_2, Φ_2 在 P_i 点处的偏导数代入式(17)整理,并设定:

$$\begin{cases} p_1 = -4x_{P_i} y_{P_i} \\ q_1 = 4x_{P_i} z_{P_i} \\ r_1 = 0.0 \\ p_2 = 2(y_{P_i} r - x_{P_i} q) \\ q_2 = 2(x_{P_i} p - x_{P_i} r) \\ r_2 = 2(x_{P_i} q - y_{P_i} p) \end{cases}$$

过 P_i 处剖面所在大圆弧与过该处纬圈的交角 θ_1 余弦为:

$$\cos \theta_1 = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2}{(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2)^{1/2} (p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)^{1/2}} \quad (21)$$

插值到 P_i 处的矢量水平分量与该处纬圈的

夹角 θ_2 余弦为:

$$\cos\theta_2 = \frac{v_{P_i}}{u_{P_i}} \quad (22)$$

故得插值到 P_i 处矢量的水平分量与剖面所在大圆弧的夹角为 $\theta = |\theta_2 - \theta_1|$, 因而 P_i 处剖面上矢量的水平分量为:

$$V_{P_i} = (v_{P_i}^2 + u_{P_i}^2)^{1/2} \cos\theta \quad (23)$$

绘剖面上的矢量时, 将水平分量 V_{P_i} 与垂直分量 W_{P_i} 合成即可。

3 图形示例

由式(1)一(14)求得剖面网格坐标, 又由式(17)一(20)求得剖面网格上的标、矢量要素值, 用现有的绘图软件(这里所用的是 NCAR 绘图软件), 可绘制我们所需要的垂直剖面图。图 3 是 1992 年 7 月 3 日过(10°N, 90°E)、(45°N, 140°E)(江南暴雨)位势涡度垂直剖面图; 图 4 为同日相同剖面上的湿位涡(实线)、假相当位温(虚线)和风矢的配置情况; 图 5 是 1992 年 11 月 24 日过(40°N, 100°E)、(10°N, 120°E)(一次寒潮)的 θ_{se} 和风矢的配置图。

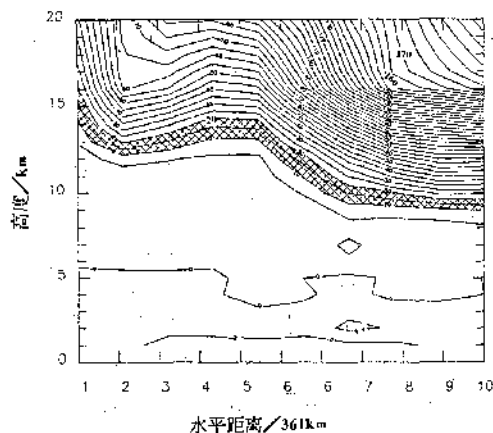


图 3 1992 年 7 月 3 日过(10°N, 90°E)、(45°N, 140°E)湿位涡垂直剖面图
阴影处为对流顶, 单位为 0.1PVU

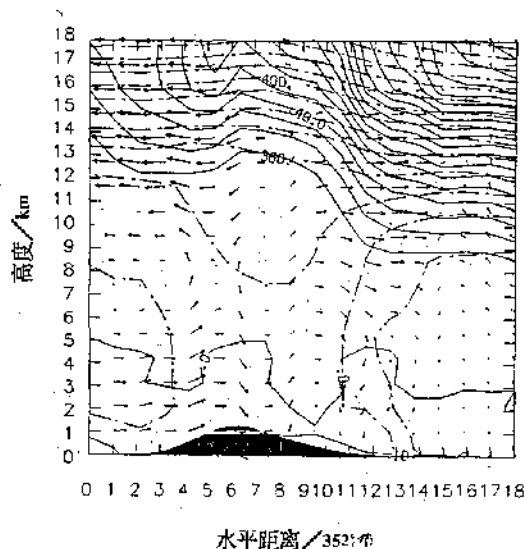


图 4 风矢、湿位涡(实线)、假相当位温(虚线)的配置图(时间、地点同图 3)
阴影处为地形, 风矢垂直方向单位为 $-0.5 \times 10^{-4} \text{hPa} \cdot \text{s}^{-1}$

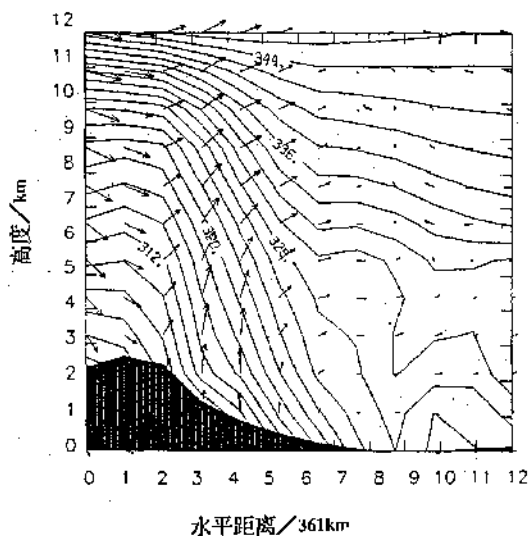


图 5 1992 年 11 月 24 日过(40°N, 100°E)、(10°N, 120°E)的 θ_{se} 和风矢的结构配置图
阴影处为地形

几个实际天气个例的分析, 以及对某些特殊天气系统的结构分析表明, 设计出的这种任意截剖方向的垂直剖面图, 不仅能准确表达系统结构, 而且十分便于计算机处理, 是一种比较理想的系统结构分析手段。

Design of a Free-Oriented Vertical Cross-Section in Spherical Coordinates

Zhang Shaoqing Liu Huanzhu

(National Meteorological Center, Beijing 100081)

Abstract

A free-oriented vertical cross-section with spherical trigonometric function is suitable to numerical analysis in meteorological applications. It was shown that employing the scheme developed, the vertical structure of synoptic system can be exactly represented on the vertical cross-section.

Key Words: free-oriented vertical cross-section design