

# 层状云中垂直线源的扩散问题

申亿铭 余康元

(北京气象学院, 100081)

## 提 要

下投式飞机和火箭焰弹分散的催化剂一般都形成若干条垂直线源。该文利用湍流扩散的梯度输送理论, 提出了层状云中垂直线源催化剂扩散的理论模式, 并给出了顺风向和垂直于风向发射的多条线源催化剂浓度叠加效应的计算公式。

关键词: 催化剂 湍流扩散 叠加效应

## 引 言

现在, 人工影响天气的工具和技术手段已大有进步, 从早期使用的土炮和土火箭, 到使用装备有自动化播撒器的飞机和弹头装有催化剂的高炮与火箭, 并进而发展了火箭焰弹和飞机焰弹。与此密切相关就形成了不同类型的催化剂扩散的源型。

现在研制的火箭焰弹和飞机焰弹都是间歇性发射的, 其下落轨迹构成垂直线源, 显然不同于水平线源的扩散。它们形成的源形如图1、2所示。



图1 火箭焰弹下投线源示意图  
箭头为火箭发射方向

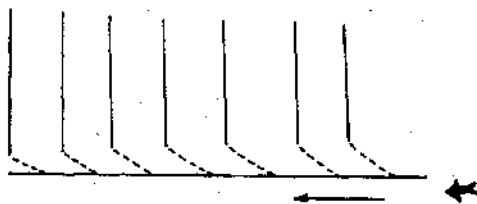


图2 飞机焰弹下投线源示意图  
箭头为飞机飞行方向

从图1、2可以看出, 无论是火箭焰弹, 还是飞机焰弹都形成多条垂直线源, 在扩散过程中催化剂的浓度必然相互叠加。从已发表的文献来看, 1971年 Л. С. Чоторлишвили 研究了雹云中有限垂直线源的扩散问题<sup>[1]</sup>, 1983年 В. В. Клигго, Г. Д. Кудашкин 和 В. Ш. Файзуллин 对对流云中的垂直线源的扩散进行了数值模拟<sup>[2]</sup>, 但他们都没有考虑多条垂直线源催化剂扩散浓度的叠加效应。目前尚未发现有关过冷层状云中垂直线源催化剂扩散的文章。1982年和1983年我们虽先后发表了过冷层状云中飞机播撒催化剂的扩散问题<sup>[3]</sup>和飞机播撒催化剂的叠加效应<sup>[4]</sup>, 但是那是水平无限线源而言的, 不能用于垂直方向上线源扩散和叠加浓度的计算。因此, 本文提出了建立层状云中垂直线源扩散的理论模式和催化剂叠加浓度的计算公式的任务。

## 1 垂直线源扩散方程及其解

层状云中垂直线源扩散方程具有如下形式:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = k_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - \alpha N_c q \quad (1)$$

式中,  $q$  为催化剂浓度,  $u$  和  $v$  为  $x$  和  $y$  轴的风速分量,  $k_x$  和  $k_y$  分别为  $x$  和  $y$  轴的湍流系数,  $\alpha$  为云滴的捕获系数,  $N_c$  为云滴浓度。至

于催化剂质点间的并合效应,由于计算数量较小<sup>[5]</sup>,所以在方程中未予考虑。

如令水平风向与  $x$  轴相合而与  $y$  轴垂直,则  $v \frac{\partial q}{\partial y}$  项可以忽略。这样方程(1)就变为:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - \alpha N_c q \quad (2)$$

再令  $q = q' e^{-\alpha N_c t}$ , 将其代入方程(2), 并消去  $e^{-\alpha N_c t}$  项, 则得:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u \frac{\partial q'}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 q'}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 q'}{\partial y^2} \quad (3)$$

解方程(3)给定如下初始和边界条件。

假定初始时刻在垂直轴  $z$  上在边长为  $h$  的正方体以外的空间催化剂浓度为零, 在此正方体中心浓度为  $Q_1$ , 于是初始和边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} t=0 \text{ 时} \quad q' &= Q_1 & -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2} \\ & & -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} \\ q' &= 0 & -\frac{h}{2} > x > \frac{h}{2} \\ & & -\frac{h}{2} > y > \frac{h}{2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad q' &= 0. \end{aligned} \right\} (4)$$

对于单位线源, 满足质量守恒条件, 应有

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} q' dx dy = Q_1 h^2 = Q \quad (5)$$

这样方程(3)的解则为:

$$q'(x, y, t) = \frac{Q}{4\pi kt} \exp\left[-\frac{(x-ut)^2 + y^2}{4kt}\right] \quad (6)$$

式中  $Q$  为单位线源的核生成率。除此在求解时已令  $k_x = k_y = k$ , 即认为大气是各向同性的。

如若考虑云滴对催化剂质点的捕获作用, 则式(6)应变为:

$$q = \frac{Q}{4\pi kt} \exp\left[-\frac{(x-ut)^2 + y^2}{4kt}\right] e^{-\alpha N_c t} \quad (7)$$

一般地说, 在同一气压下含水量愈大, 云滴浓度愈大, 时间愈长, 捕获效应愈大, 但在

催化剂的一定尺度范围内也可以不考虑云滴对催化剂质点的捕获作用<sup>[6]</sup>。所以本文仍按式(6)计算。

## 2 叠加浓度的计算方法

公式(6)只能计算一条垂直线源的扩散浓度, 但火箭和飞机焰弹都组成多条垂直线源, 为了获得某一时刻某一地点的实际浓度, 必须计算多条垂直线源扩散产生的叠加浓度。

火箭和飞机焰弹既可顺风向发射, 也可垂直于风向发射, 这样就形成了两种不同的催化剂浓度的叠加方式。

### 2.1 火箭或飞机焰弹顺风向发射时多条线源叠加浓度的计算方法

我国研制的 FJY-34 飞机降水焰弹的发射装置可装 100 发焰弹, 全部发射时则构成 100 条垂直线源; 而火箭箭头则装有 15 发焰弹, 发射时构成 15 条垂直线源。本文仅对火箭焰弹催化剂扩散的叠加浓度进行计算。

每发火箭焰弹含有 0.32g AgI, 其核生成率为  $10^{13}$  个  $\cdot g^{-1}$ 。当火箭进入云内顺风向近乎水平飞行时, 每隔 2 秒钟 (距离为 100m) 发射一颗焰弹, 每颗焰弹在下落过程中都形成一条独立的垂直线源, 我们忽略焰弹发射初期的抛物段轨迹和下落时侧风对其轨迹的影响, 而认为每条线源都是垂直的, 这样将形成如图 3 所示的多条垂直线源。它们在扩散过程中互不干扰, 但在扩散范围内的任何空间地点都会产生催化剂浓度的叠加, 因此研究叠加效应是十分必要的。

图 3 中  $x$  和  $z$  为水平和垂直坐标;  $t$  为时间; 令  $\bar{u}$  为与  $x$  轴方向一致而与  $y$  轴垂直的

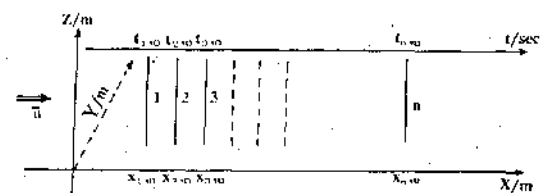


图 3 火箭焰弹顺风向发射垂直线源示意图

水平风速分量;  $1, 2, 3, \dots, n$  代表线源标号;  $t_{1,0}, t_{2,0}, t_{3,0}, \dots, t_{n,0}$  分别表示各颗焰弹发射的初始时间; 亦即形成各条线源的初始时刻; 而  $x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \dots, x_{n,0}$  则为各条线源初始时间对应的坐标。

现在我们将公式(6)改写成对任意一条线源都适用的普适公式

$$q^n = \frac{Q}{4\pi kt_n} \exp\left[-\frac{(x_n - ut_n)^2 + y_n^2}{4kt_n}\right] \quad (8)$$

式中  $x_n$  为空间任一点(例如 A 点)距第  $n$  条垂直线源初始坐标的水平距离, 而  $t_n$  为该条线源的扩散时间。

由于垂直线源间的时间间隔都是相等的, 故应有:

$$t_n - t_{n-1} = \Delta t = \text{常数}$$

为计算方便, 我们确定以第一条线源的扩散时间为准(从零秒起算), 依次后延, 则任意线源的扩散时间可按式推算:

$$t_n = t_1 + n\Delta t, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 15 \quad (9)$$

如令  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  分别代表第一条至第  $n$  条线源的催化剂浓度, 则从图3上可以看出, A 点所接受到的催化剂应该是各线源扩散浓度的总和。因此影响区内任一空间地点、不同时间催化剂的叠加浓度  $q$ , 应为:

$$q = q_1(t_1, x_1, y_1) + q_2(t_2, x_2, y_2) + \dots + q_n(t_n, x_n, y_n) = \sum_1^n q_n(t_n, x_n, y_n) \quad (10)$$

利用式(8)、(9)和(10)就可以计算若干条垂直线源下风方向的催化剂扩散的叠加浓度和它们的时空分布。

## 2.2. 火箭焰弹垂直于风向发射时多条线源叠加浓度的计算方法

火箭焰弹垂直于风向发射时多条垂直线源催化剂的水平扩散方向同时向发射方向和反发射方向两方进行, 所以比较复杂(如图4所示)。

我们以第8条线源为基准, 令其浓度为  $q_0$ , 坐标为  $y_0$ , 其左右两个方向上的  $q$  和  $y$  的

标号分别为  $q_1, q_2, \dots, q_7$  和  $y_1, y_2, \dots, y_7$ 。

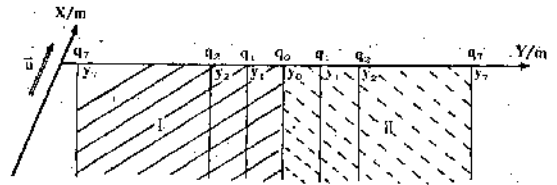


图4 火箭焰弹垂直风向发射垂直线源示意图

线源的时间间隔和距离间隔均相等, 故有:

$$t_n - t_{n-1} = \Delta t = \tau = 2s,$$

$$y_n - y_{n-1} = \Delta y = 100m$$

其中  $n=0, 1, 2, \dots, 7$ 。

为计算方便, 我们将催化剂扩散区分为 I 区和 II 区, 分别计算两区的催化剂的叠加浓度。并用  $q^1$  表示 I 区的催化剂浓度,  $q^2$  表示 II 区的催化剂浓度, 而令  $q^{11}$  和  $q^{12}$  分别代表 I 区源和 II 区源对 I 区催化剂浓度的叠加效应,  $q^{21}$  和  $q^{22}$  则代表 I 区源和 II 区源对 II 区催化剂浓度的叠加效应。这样 I 区催化剂的浓度  $q_s^1$  应为:

$$q_s^1 = q_s^{11} + q_s^{12} \quad (11)$$

其中

$$q_s^{11} = \sum_{n=0}^7 q_n^{11}, \quad q_s^{12} = \sum_{n=0}^7 q_n^{12}$$

而

$$q_n^{11} = \frac{Q}{4\pi k(T+2n)} \times \exp\left\{-\frac{[x-u(T+2n)]^2 + (y-100n)^2}{4k(T+2n)}\right\}$$

$$q_n^{12} = \frac{Q}{4\pi k(T-2n)} \times \exp\left\{-\frac{[x-u(T-2n)]^2 + (y+100n)^2}{4k(T-2n)}\right\}$$

II 区催化剂的叠加浓度  $q_s^2$  则为:

$$q_s^2 = q_s^{21} + q_s^{22} \quad (12)$$

$$\text{其中 } q_s^{21} = \sum_{n=1}^7 q_n^{21}, \quad q_s^{22} = \sum_{n=1}^7 q_n^{22}$$

$$\text{而 } q_n^{21} = \frac{Q}{4\pi k(T+2n)} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{[x-u(T+2n)]^2+(y+100n)^2}{4k(T+2n)}\right\}$$

$$q_n^{zz} = \frac{Q}{4\pi k(T-2n)} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{[x-u(T-2n)]^2+(y-100n)^2}{4k(T-2n)}\right\}$$

### 3 计算数据和结果分析

在计算中我们使用了如下数据： $Q=3.2 \times 10^{12}$  个  $\text{cm}^{-3}$ ， $k=20\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  和  $k=40\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ， $u=6\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。对于顺风向发射的火箭焰弹形成的多条垂直线源，我们计算了1、5、10和15条垂直线源的叠加浓度；而对于垂直于风向发射的火箭焰弹形成的多条垂直线源，只计算了15条线源总和的叠加浓度。上述计算结果分别见图5—9(均为水平截面)。

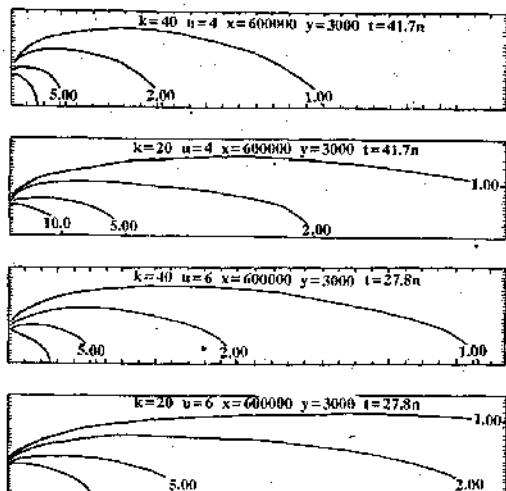


图5 催化剂扩散范围(在 XOY 平面)随时间和距离的变化及催化剂浓度的时间分布

$n$ : 线源数,  $t$  单位: 小时,  $x, y$ : 每格距为 1500m

分析图4和图8可以看出: ①不管水平风速  $u$  和湍流系数  $k$  值的大小如何, 都是线源数量愈多, 扩散范围愈大(包括  $x$  和  $y$  轴两个方向), 在固定地点催化剂的浓度也愈大; ②在  $k$  值和线源数量一样时, 水平风速愈大,  $x$  方向的扩散范围也愈大; ③在风速和线源数量一样时, 湍流系数愈大, 其在  $y$  方向上的扩散范围也愈大。但在  $x$  方向上却由于湍流系数大催化剂浓度衰减的快, 所以扩散距离

要比湍流系数小时的小。

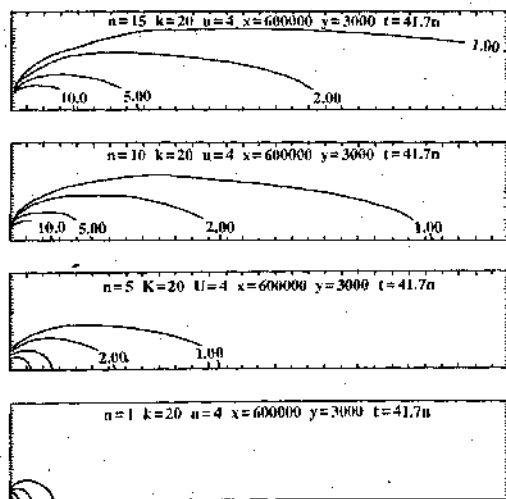


图6 说明同图5

$k=20\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $u=4\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

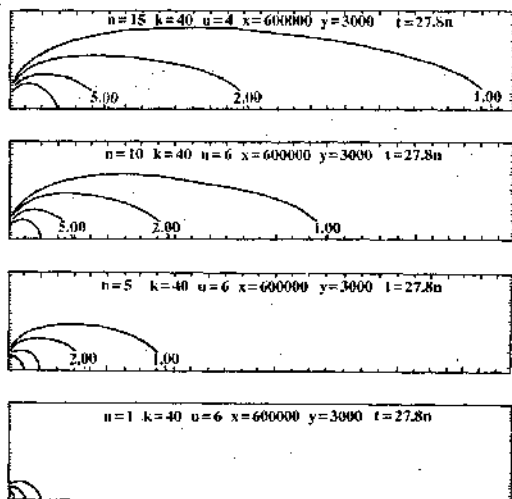


图7 说明同图5

$k=40\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $u=6\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

分析图9可以看出, 其扩散规律基本上与上述规律一致, 也是  $k$  值相同时风速愈大,  $x$  方向的扩散范围也愈大; 风速相同时  $k$  值愈大在  $x$  方向上的扩散距离比  $k$  值小时为小。

比较相同参数下的图5—8和图9, 可以得出如下结论: 火箭焰弹顺风发射时催化剂在  $x$  方向上的扩散范围要比垂直于风向发射时在同方向上的扩散范围大; 相反, 在  $y$  方向上

催化剂的扩散范围则是后者大于前者。

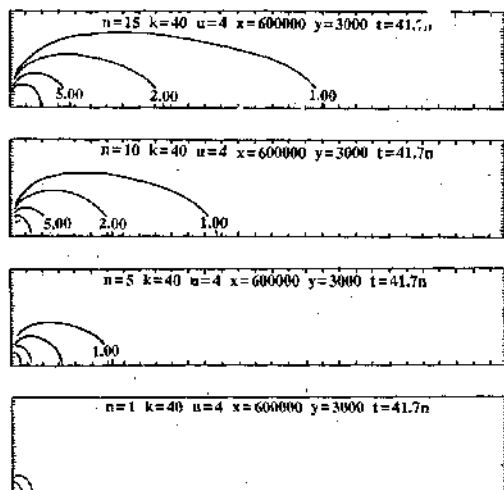


图8 说明同图5

$k=40\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, u=4\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

因此在使用火箭焰弹激发或增大层状云的降水时,视具体情况和要求而定,火箭焰弹既可顺风向发射,也可垂直于风向发射。如用飞机发射焰弹则根据催化剂的扩散范围和浓度要求可调整发射焰弹的数量。

### 参考文献

- 1 Л. С. Чоторлишвили. Распространение пассивной примеси в облаках от мгновенного линейного источника. Сообщение АН СССР. 1971. Т. 61. No3. 581—583.
- 2 В. В. Клягю, Г. Д. Кудашкин, Б. Ш. Фазауллин.

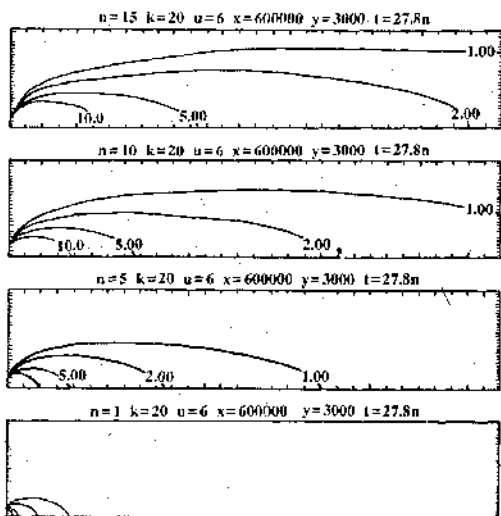


图9 焰弹垂直于风向发射时,催化剂的扩散范围随时间和距离的变化及催化剂浓度等值线的时空变化

说明和标记同图5

Распространение аэрозольного реагента в конвективном облаке от вертикально ориентированного источника. Тр. ГГО. вып. 1983. 469. 37—41.

- 3 申亿铭. 过冷层状云中飞机播撒催化剂的扩散问题. 气象科学技术集刊(2). 北京:气象出版社,1982,17—26.
- 4 申亿铭. 飞机播撒催化剂的叠加效应. 南京气象学院学报,1983年第2期,239—246.
- 5 G Zebell. Trace elements in the atmosphere. Ann. arbor. science. 1966, 230.
- 6 Isaac, G. A. RH. Douglas. Another "Time Lag" in the Activation of Atmosphere Ice Nuclei. J. Appl. Meteor. 1972, 11(3):490—493.

## The Diffusion of Catalytic Agents of a Vertical Line Source in Stratiform Clouds

Shen Yiming Yu Kangyuan

(Beijing Meteorological Institute, 100081)

### Abstract

A number of vertical line sources was generally caused by catalytic agents, dispersed from falling pyrotechnical flares of an airplane or a rocket. With the gradient-transfer theory of turbulent diffusion, we present a theoretical model of agents diffusion of vertical line sources in supercooled stratiform clouds and, we give a calculative formula of superposing effect of agents' concentration of numerous vertical line sources, which were perpendicular to the direction of horizontal wind or were parallel to the direction of horizontal wind.

**Key Words:** catalytic agent turbulent diffusion superposing effect