

# 风速垂直变化对催化剂扩散的影响

申亿铭 陈吉航

(北京气象学院, 100081)

## 提 要

在寻求层状云中催化剂扩散方程的解时,一般都假定风速为常值,但实际上风速是随高度变化的。该文在云中催化剂的数值模式中考虑了风速随高度的变化,用差分格式求其解,并进行了个例计算和比较分析。

**关键词:** 风速垂直变化 扩散 催化剂 数值模式

## 引 言

我国北方地区在春夏季节,甚致在冬季都常常出现旱情。为了减轻干旱给农作物带来的损失,与使用高炮进行人工影响天气作业的同时,在大面积上多采用飞机播撒催化剂激发或增大降水的人工影响天气的作业技术,其作业轨迹形成线源。为了计算线源催化剂的扩散规律,在文献[1]中我们求得了无限线源湍流扩散方程的解,其原始方程形式如下:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right) - u \frac{\partial q}{\partial x} + w \frac{\partial q}{\partial z} \quad (1)$$

式中,  $q$  为催化剂浓度,  $x$  和  $z$  为坐标,  $k$  为大气湍流扩散系数,  $u$  为  $x$  轴上的风速分量,  $w$  为催化剂质点的下落速度(因层状云中气流上升速度较小,所以忽略了该项)。

在求解方程(1)时为了简便,如许多作者所作过的一样,我们也假定了  $u$  为常数。但实际上风速随高度多是变化的,无疑这种变化会对催化剂的扩散产生影响。1977年 P. H. Hildebrand<sup>[2]</sup>, 1980、1982年 Г. Н. Схиртладзе 和 Ы. С. Юрчак<sup>[3,4]</sup> 以及1981年 С. П. Гирс<sup>[5]</sup> 等都利用雷达观测资料分析了风切变对催化剂扩散的影响。结果表明,最大浓度轴线已不在平均风向上,而是转移到风的切变方向上,

根据 Hildebrand 的观测资料得到的结果是,风切变方向上催化剂的扩散速度要比其横截方向上的扩散速度大一个量级,这样就必须考虑催化剂的播撒剂量。当然风切变对催化剂扩散的影响包括风向和风速两个方面,由于本文研究的是垂直于风向的水平无限线源的扩散,所以暂只考虑风速随高度变化对催化剂扩散的影响和作用。

## 1 扩散方程及其差分格式

假定风速随高度变化是线性规律,并以播撒高度的风速  $u_0$  为基准风速,则风速随高度变化的公式为:

$$u = u_0 \pm \Gamma z \quad (2)$$

式中,  $u_0$  为播撒高度的水平风速,  $\Gamma$  为风速的垂直梯度,它视风速随高度的增大或减小,可正可负。 $z$  为自播撒高度起算的绝对高度值,并以100m 为单位。

将式(2)代入式(1),则有:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right) - (u_0 \pm \Gamma z) \frac{\partial q}{\partial x} + w \frac{\partial q}{\partial z} \quad (3)$$

解方程(3)给定下列初始和边界条件。假定在初始时刻,在水平轴线上,在边长为  $h$  的正方体以外的空间催化剂浓度为零,在此正方体中心浓度为  $Q_0$ ,这样初始和边界条件则为:

$$\left. \begin{aligned}
 t = 0 \text{ 时, } & q = Q_1; & -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2} \\
 & & -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \\
 & q = 0; & -\frac{h}{2} > x > \frac{h}{2} \\
 & & -\frac{h}{2} > z > \frac{h}{2} \\
 z = 0 \text{ 时, } & q = 0; \\
 \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty & q = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

满足质量守恒条件,对于单位线源应有:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} q dx dz = qh^2 = Q; h^2 = Q \quad (5)$$

式中  $Q$  为单位线源核生成率。

上述方程利用差分格式求解,但是由于是二维问题,如果应用一般的显示格式,会产生时间步长要求愈来愈小,计算工作量愈来愈大的困难;如果使用一般的隐式格式,又要在每一个时间层上解五对角的  $(N-1)(M-1)$  个未知量的方程组,显然没有解三对角方程组那么方便。因此我们使用交换方向上隐式格式中的 Peaceman-Rachford 方法,即通常所称的 P-R 方法。这个方法的优点是可以一个二维问题化为两个一维问题的解,这样就可以使求解过程大大简化。

取时间步长为  $\Delta t$ , 坐标  $x$  和  $z$  轴上的步长为  $\Delta x$  和  $\Delta z$ , 并令  $\Delta t = \tau, \Delta x = s$  和  $\Delta z = h$ , 这样就有:  $t = n\tau, x = \pm is, z = \pm jh$ , 其中  $n = 0, 1, 2, \dots, m; i = 0, 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, 2, \dots, M$ 。

将方程(3)进行差分,并项后可得:

$$\begin{aligned}
 & (r - \theta u_0 - \tau j) q_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+1} \\
 & - (1 + 2r) q_{i, j}^{n+1} \\
 & + (r + \theta u_0 + \tau j) q_{i-\frac{1}{2}, j}^{n+1} \\
 & + (\mu + \lambda w_{i, j}^n) q_{i, j+1}^n \\
 & + (1 - 2\mu) q_{i, j}^n \\
 & + (\mu - \lambda w_{i, j}^n) q_{i, j-1}^n = 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\mu + \lambda w_{i, j}^{n+1}) q_{i, j+1}^{n+1} - (1 + 2\mu) q_{i, j}^{n+1} \\
 & + (\mu - \lambda w_{i, j}^{n+1}) q_{i, j-1}^{n+1} \\
 & + (r - \theta u_0 - \tau j) q_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+1} + (1 - 2r) q_{i-\frac{1}{2}, j}^{n+1} \\
 & + (r + \theta u_0 + \tau j) q_{i-\frac{1}{2}, j}^{n+1} = 0 \quad (7)
 \end{aligned}$$

其中

$$\frac{\tau k}{2s^2} = r, \frac{\tau k}{2h^2} = \mu, \frac{\tau}{4s} = \theta, \frac{\tau}{4h} = \lambda,$$

再令

$$\begin{aligned}
 r - \theta u_0 - \tau j &= a_j, 1 + 2r = b, \\
 1 - 2r &= b', r + \theta u_0 + \tau j = c_j, \\
 \mu + \lambda w_{i, j}^{n+1} &= \alpha_{i, j}^{n+1}, 1 + 2\mu = d \\
 1 - 2\mu &= d', \mu - \lambda w_{i, j}^{n+1} = \beta_{i, j}^{n+1}
 \end{aligned}$$

将它们代入式(6)和(7),则有:

$$\begin{aligned}
 & a_j q_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+1} - b q_{i, j}^{n+1} + c_j q_{i-\frac{1}{2}, j}^{n+1} \\
 & + \alpha_{i, j}^{n+1} q_{i, j+1}^{n+1} + d' q_{i, j}^{n+1} + \beta_{i, j}^{n+1} q_{i, j-1}^{n+1} = 0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{i, j}^{n+1} q_{i, j+1}^{n+1} - d q_{i, j}^{n+1} + \beta_{i, j}^{n+1} q_{i, j-1}^{n+1} \\
 & + a_j q_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+1} + b' q_{i-\frac{1}{2}, j}^{n+1} + c_j q_{i-\frac{1}{2}, j}^{n+1} = 0 \quad (9)
 \end{aligned}$$

再将差分方程(8)和(9)写成矩阵形式,则得

$$A q_{i, j}^{n+1} = F q_{i, j}^n \quad (10)$$

$$B q_{i, j}^{n+1} = G q_{i, j}^{n+1/2} \quad (11)$$

应用初始和边界条件求解方程(10)和(11)时,其系数矩阵具有如下形式:

$$A = \begin{bmatrix} -b & c_j & & & & \\ a_j & -b & c_j & & & \\ & a_j & -b & c_j & & \\ & & a_j & -b & c_j & \\ & & & a_j & -b & c_j \\ & & & & a_j & -b \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$B = \begin{bmatrix} -d & \beta_{i, j} & & & & \\ \alpha_{i, j} & -d & \beta_{i, j} & & & \\ & \alpha_{i, j} & -d & \beta_{i, j} & & \\ & & \alpha_{i, j} & -d & \beta_{i, j} & \\ & & & \alpha_{i, j} & -d & \beta_{i, j} \\ & & & & \alpha_{i, j} & -d \end{bmatrix} \quad (13)$$

从(12)和(13)两式可以看出,系数  $A$  和  $B$  均为三对角矩阵,这样就可以用追赶法求解。至于方程(10)和(11)的右端,应用初始和边界

条件以及以后的逐层计算实为已知值,所以方程(10)和(11)不难求解。

差分方程(10)和(11)的计算方法如下:

第一,固定  $j$  而令  $i$  改变,这样求得的追赶公式则有:

$$q_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = M_{i,j}^n + N_i q_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (14)$$

其中 
$$M_{i,j}^n = \frac{F_{i,j}^n + a_j M_{i-1,j}^n}{b - a_j N_{i-1,j}}$$

$$N_i = \frac{c_j}{b - a_j N_{i-1,j}}$$

$$F_{i,j}^n = \alpha_{i,j-1}^n q_{i,j}^n + d q_{i,j}^n + \beta_{i,j}^n q_{i+1,j}^n$$

但是当  $i=j=0$  时,则有:

$$M_{0,0}^n = \frac{F_{0,0}^n + a_0 q_{-1,0}^{n+\frac{1}{2}}}{b}$$

$$N_0 = \frac{c_0}{b}$$

第二,固定  $i$  而令  $j$  改变,可求出如下的追赶公式:

$$q_{i,j}^{n+1} = H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + R_{i,j+1}^{n+1} q_{i,j+1}^{n+1} \quad (15)$$

其中

$$H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{G_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_{i,j-1}^{n+1} H_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{d' - \alpha_{i,j-1}^{n+1} R_{i,j-1}^{n+1}}$$

$$R_{i,j+1}^{n+1} = \frac{\beta_{i,j+1}^{n+1}}{d' - \alpha_{i,j}^{n+1} R_{i,j}^{n+1}}$$

$$G_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = a_j q_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + b' q_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + c_j q_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

但是当  $i=j=0$  时,则有:

$$H_{0,0}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{G_{0,0}^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_{0,0}^{n+1} H_{0,-1}^{n+\frac{1}{2}}}{d'}$$

$$R_{0,0}^{n+1} = \frac{\beta_{0,1}^{n+1}}{d'}$$

至于催化剂质点的下落速度,在假定它们为球形质点的情况下,我们可以使用牛顿公式进行计算<sup>[6]</sup>。

$$w = 1.15 \left( \frac{T \cdot d}{P} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

式中,  $T$  为空气温度,  $P$  为气压,  $d$  为催化剂质点的直径。

当催化剂质点的初始直径为 0.1 和 0.3mm 时,计算得到的下落速度分别为 7 和

12cm. s<sup>-1</sup>,而给定边界高度上的冰晶质点下落速度则取自 Magono 的实验数据<sup>[7]</sup>,它们分别为 60 和 70cm. s<sup>-1</sup>。根据两个高度上冰晶质点的下落速度和高度差,我们确定了冰晶下落速度的步长和相应的计算公式:

$$w_{i,j}^n = w_0 + ms \quad (17)$$

式中  $s$  为计算下落速度的步长,  $m$  为步数。

## 2 计算参数与结果分析

在计算中使用了如下参数:催化剂的单位线源核生成率  $Q = 10^{12}$  个. cm<sup>-1</sup>,初始下落速度是根据(16)式计算的,分别为 7 和 12cm. s<sup>-1</sup>,至于风速垂直梯度则是根据 1000(云底高度)、2000、3000、4000 和 5000m 各高度上相应的风速 4、5、6、10 和 15m. s<sup>-1</sup> 来分别确定的,湍流扩散系数分别取 20 和 40m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup> 两档。计算中使用的时间步长为 5min,水平步长为 1800m,垂直步长为 100m,下落速度的步长在  $w_0 = 7$ cm. s<sup>-1</sup> 时取 1.325cm. s<sup>-1</sup>,当  $w_0 = 12$ cm. s<sup>-1</sup> 时取 1.45cm. s<sup>-1</sup>。

为了对不同情况进行比较,我们计算了  $k = 20$ m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>,  $w = 0$ , 风速随高度变化;  $k = 20$ m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>,  $w = 7$ cm. s<sup>-1</sup>, 风速随高度变化;  $k = 40$ m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>,  $w = 7$ cm. s<sup>-1</sup>, 风速随高度变化;  $k = 20$ m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>,  $w = 12$ cm. s<sup>-1</sup>, 风速随高度变化和  $k = 20$ m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>,  $w = 7$ cm. s<sup>-1</sup>, 但风速随高度不变(以播撒高度的风速为准)等 4 种情况下的催化剂扩散和浓度分布图形。计算结果分别绘制成图 1—4。

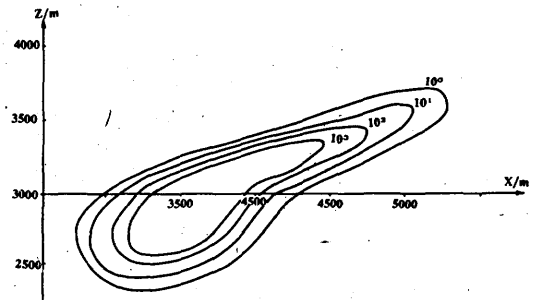


图1 播撒后 10min 催化剂浓度在 XOZ 剖面的分布  
 $w=0, X:Z=1:1$

分析图1和图2可以看出,由于风速垂直切变的影响,催化剂浓度在 XOZ 垂直剖面上的分布已不是对称性的了,而是呈顺风向前倾斜延伸的锥形,时间愈长,向前延伸也愈厉害;同时还可以看出,在播撒高度以上催化剂浓度等值线发生了折断变化,这是由于风速垂直切变在播撒高度上下的急剧变化引起的。从图3上可以看到,随着时间的增大,催化剂扩散范围也逐渐增大,但到一定时间后将会发生相反的变化。

从图4a—e上可以看出,催化剂扩散的基本规律是:第一,湍流系数愈大,垂直扩散

范围愈大;第二,离源愈近,浓度愈大,但时间和距离的不断增大,浓度则逐渐减小,最终趋近于零;第三,在催化剂质点下沉速度的作用下催化剂浓度等值线是向下倾斜的,而且下沉速度愈大,倾斜度也愈大。

比较图4a、b和图4d、e,发现它们之间存在的主要差别在于:当其它参量相同时,按照风速随高度增大的理论模式计算的催化剂扩散范围都大于按照风速定常情况下计算的水平扩散范围,但在播撒高度以下由于风速大小差别不大,所以未发现明显的扩散范围的差异。

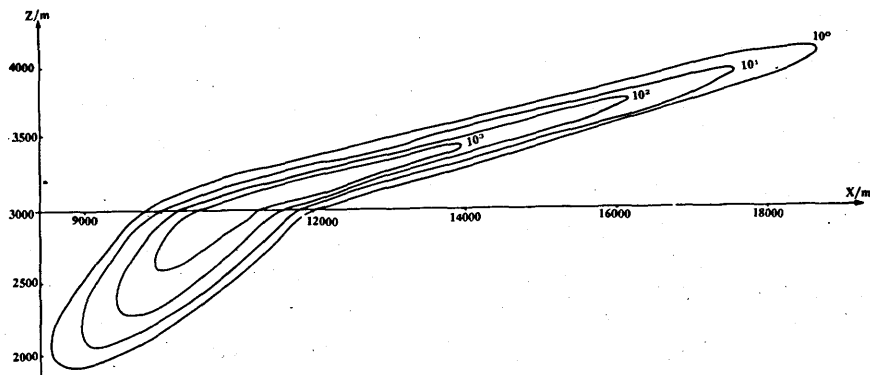


图2 播撒后30min 催化剂浓度在 XOZ 剖面分布

$$w=0, X:Z=2:1$$

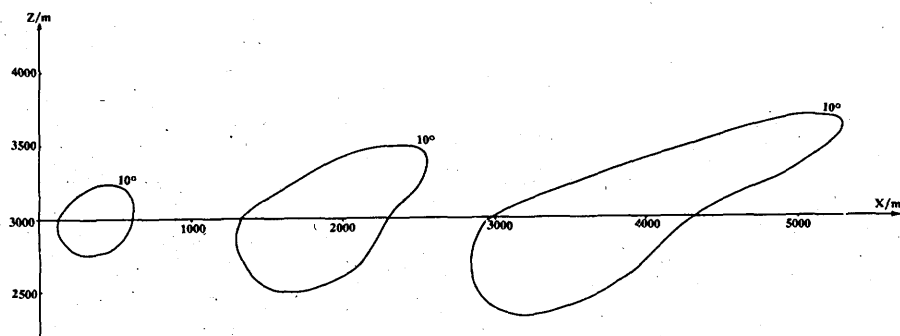


图3 不同时间催化剂扩散范围(以 $10^0$ 为界)变化图

$X:Z=1:1$  a. 播撒后1min, b. 播撒后5min, c. 播撒后10min

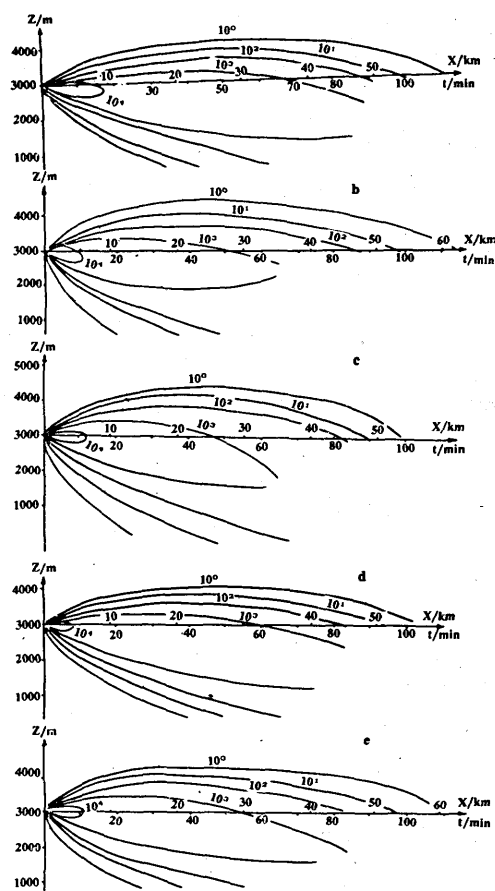


图4 催化剂及其浓度的扩散范围随时间、距离的连续变化

	$k/m^2 \cdot s^{-1}$	$w/cm \cdot s^{-1}$	$u/m \cdot s^{-1}$
a	20	7	4,5,6,10,15
b	40	7	4,5,6,10,15
c	20	12	4,5,6,10,15
d	20	7	6
e	40	7	6

## The Influence of the Vertical Change of Wind Speed on Diffusion of Catalytic Agents Released from an Airplane

Shen Yiming    Chen Jihang

(Beijing Meteorological Institute)

### Abstract

The variation of wind speed with the altitude is taken into account in the diffusion equation of catalytic agents in stratiform cloud. With the finite-difference method a numerical solution of diffusion equation of catalytic agents is sought. In addition, comparison with constant wind speed with height is made.

**Key Words:** vertical variation of wind speed    diffusion    catalytic agent    numerical model

综合上述结果,当风速随高度增大时,催化剂的扩散范围会相应的增大,这种情况有利于人工影响降水的催化作业,相反则会缩小扩散范围,一定程度上影响作业的空间尺度。

### 参考文献

- 1 申亿铭、陈吉航. 飞机播撒催化剂扩散问题的数值解法. 气象学报, 1986, 44(4): 440—446.
- 2 P. H. Hildebrand. Radar study of turbulent in the lower atmosphere. J. Appl. Meteor. 1977. Vol. 16. No. 5, 493—511.
- 3 Г. И. Схиртладзе, Б. С. Юрчак. Изменение параметров атмосферной диффузии в областях сдвига ветра. радиолокационным методом. Изв. АН СССР 1980. Т. 6. No. 4, 427—433.
- 4 Г. И. Схиртладзе Б. С. Юрчак. Распространение примеси по горизонтали в слоистообразных облаках. Изв. АН СССР ФАО. Т. 18. No. 6, 673—699, 1982.
- 5 С. И. Гирс, В. И. Каменцев, Г. И. Серов, Б. С. Юрчак. Возможности использования электропроводящих углеродных нитей для исследования воздушных потоков в облаках Тр. ГГО. вып. 420. 82—88, 1979.
- 6 G. A. Isaac, R. H. Douglas. "Time Lag" in the activities of atmospheric ice nuclei J. Appl. Meteor. 11, 1972.
- 7 В. J. 梅森著. 中国科学院大气物理研究所译. 云物理学. 1978, 北京: 科学出版社, 677.