综合评述

卡尔曼滤波在天气预报中的应用

黄嘉佑　　　　谢　庄

（北京大学地球物理系，100871）　（北京气象台，100081）

提　要

着重介绍近年来关于卡尔曼滤波在天气预报（短期 MOS 预报与长期预报）中的应用及其进展。

关键词： 卡尔曼滤波　统计动力　MOS 预报　长期预报

引　言

目前在局地天气预报中，无论是长期或短期天气预报，常常使用统计方法建立气象要素的预报模型。例如，用动力统计方法作局地地面气象要素预报常用的是 MOS 预报，该方法使用数值模式中输出的动力物理量作为预报因子，收集若干时刻的样本资料，用统计方法，例如回归分析或判别分析等，建立对未来时刻气象要素的预报模型[1]。但是由样本资料所建立的模型，例如回归方程，并不是一成不变的，随着资料的增加模型也会随之变化。另一方面，由于数值模式的改进而不断更新，也使原先所建立的 MOS 预报模式发生变化，这给 MOS 预报带来很大的不便。而且在我国，数值预报模式使用时间不长，由模式产生的输出物理量资料不多，由此而建立的要素预报模型不太稳定。如果能建立一个随时间变化的预报模型，根据资料增加所引起的变化而变化的话，那么将对 MOS 预报带来很大的改进。

近年来不少气象学者提出使用卡尔曼滤波建立可变的预报模型，它能根据增加的资料修正原模式中的参数，模型的更新十分方便，它已在欧洲各国广泛应用于温度和风速预报上。本文将介绍这方面的新进展。

1　预报方程的卡尔曼滤波处理

在 MOS 预报中，通常从数值模式输出的物理量中选取 p 个与局地气象要素 y 密切有关的因子 $x_1,\cdots,x_p$。在收集的样本容量为 n 的样本中建立如下的多元线性回归方程（或判别方程）

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_px_p + v \quad (1)$$

其中 v 为误差变量，$b_0,b_1,b_2,\cdots,b_p$ 为回归系数。上式还可写作向量方程[2]为

$$y = Xb + v \qquad (2)$$

式中，$y(\mathrm{n}\times 1)$ 为要素向量，把它考虑为随机向量，$X(\mathrm{n}\times p)$ 为预报因子资料阵，$b(p\times 1)$ 为回归系数向量，$v(\mathrm{n}\times 1)$ 为误差向量，通常假设它为随机向量，它遵从均值向量为零协方差阵为 R 的正态分布，并设它与回归系数向量变化无关。

对所取的依赖样本，式(2)中回归系数向量是不随时间变化的，预报时利用所建立起来的方程，用当步时刻 $t-1$ 的因子值代入，即可求得下一时刻 t 的要素估计值（即预报值）。但是，实际上由于样本资料的变化，回归方程不可能保持不变。因此可考虑建立动态变化的预报方程，即式(2)演化为

$$y(t) = X(t)b(t) + v(t) \qquad (3)$$

在卡尔曼滤波中以上方程称为系统的量测方程。在方程中回归系数向量随样品状态变化而变化，这种状态变化控制着预报量的变化。因此把描述回归系数向量状态变化的方程称为状态方程，表示为

$$b(t) = \Phi(t,t-1)b(t-1) + w(t) \quad (4)$$

$\Phi(t,t-1)$称为转移矩阵，其中元素是控制状态变化的参数，当考虑状态变化过程为随机步行时，可设它为单位阵。则上式变为

$$b(t) = b(t-1) + w(t) \quad (5)$$

其中 $w(t)(p\times1)$为随机向量，它遵从均值向量为零协方差阵为 Q 的正态分布，并设它与回归系数向量变化无关，且与随机向量 $v(t)$ 无关。预报方程的更新依赖于回归系数的更新。因此，如果能对下一时刻的回归系数作有效的预报的话，则可解决问题。如果我们在 $t-1$时刻上作出对回归系数向量的估计，据式(5)则可作出对下一时刻 t 的估计。即

$$\hat{b}(t|t-1) = \hat{b}(t-1|t-1) \quad (6)$$

当然，这一估计值与真值有一定的误差，其误差记为

$$\tilde{b}(t|t-1) = b(t) - \hat{b}(t|t-1) \quad (7)$$

将式(5)代入上式有

$$\tilde{b}(t|t-1) = b(t-1) - \hat{b}(t|t-1) + w(t) = \tilde{b}(t-1|t-1) + w(t) \quad (8)$$

另外，由于回归系数向量估计带来的误差也会影响要素估计产生误差，记为

$$\tilde{y}(t|t-1) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) = y(t) - X(t)\hat{b}(t|t-1) \quad (9)$$

如果考虑由于这种原因产生的误差来修正对回归系数向量估计，那么将会改善预报。因此，对下一时刻回归系数向量估计值可表示为

$$\hat{b}(t|t) = \hat{b}(t|t-1) + A(t)\tilde{y}(t|t-1) = \hat{b}(t|t-1) + A(t)\cdot[y(t) - X(t)\hat{b}(t|t-1)] \quad (10)$$

其中 $A(t)(p\times n)$为修正系数矩阵，其中元素变化在0—1之间。在卡尔曼滤波中称为增益矩阵。这样在 t 时刻由于回归系数向量估计带来的误差可表示为

$$\tilde{b}(t|t) = b(t) - \hat{b}(t|t) = b(t) - \hat{b}(t|t-1) - A(t)\tilde{y}(t|t-1) = \tilde{b}(t|t-1) - A(t)\tilde{y}(t|t-1) \quad (11)$$

问题是如何确定修正系数矩阵。

从式(9)可见，要使要素估计产生误差最小，必须选适当的回归系数向量估计，使得要素观测向量与要素估计误差向量是正交的。而从式(10)可见，回归系数估计误差向量是要素估计误差向量的线性组合。那么要素观测向量必然也与回归系数估计误差向量正交。据此可定出修正系数矩阵。即令它们的协方差阵为零，表示为

$$E[\tilde{b}(t|t)y(t)'] = 0 \quad (12)$$

"E"为取期望算子，"$'$"表示矩阵转置。据式(9)和(11)展开上式等号的左边有

$$\begin{aligned} &E[\tilde{b}(t|t)y(t)'] \\ &= E\{[\tilde{b}(t|t-1) - A(t)\tilde{y}(t|t-1)]\cdot[\hat{y}(t|t-1) + \tilde{y}(t|t-1)]'\} \\ &= E[\tilde{b}(t|t-1)\hat{y}(t|t-1)' - A(t)\tilde{y}(t|t-1)\hat{y}(t|t-1)' \\ &\quad + \tilde{b}(t|t-1)\tilde{y}(t|t-1)' - A(t)\tilde{y}(t|t-1)\tilde{y}(t|t-1)'] \quad (13) \end{aligned}$$

考虑到要素估计向量分别与要素估计误差向量和回归系数估计误差向量均正交，上式第一、二项取期望后均为零。因此上式变为

$$\begin{aligned} &E[\tilde{b}(t|t)y(t)'] \\ &= E[\tilde{b}(t|t-1)\tilde{y}(t|t-1)'] - E[A(t)\tilde{y}(t|t-1)\tilde{y}(t|t-1)'] \quad (14) \end{aligned}$$

据式(9)和式(3)要素估计误差向量可表为

$$\tilde{y}(t|t-1) = X(t)\tilde{b}(t|t-1) + v(t) \quad (15)$$

若令

$$P(t|t-1) = E[\tilde{b}(t|t-1)\tilde{b}(t|t-1)'] \quad (16)$$

并称为预报均方误差阵，则式(14)中第一项可表示为

$$\begin{aligned} E[\tilde{b}(t|t-1)\tilde{y}(t|t-1)'] &= E\{\tilde{b}(t|t-1)\cdot[\tilde{b}(t|t-1)'X(t)' + v(t)']\} \\ &= P(t|t-1)X(t)' \quad (17) \end{aligned}$$

式(14)中第二项可表示为

$$\begin{aligned} &E[A(t)\tilde{y}(t|t-1)\tilde{y}(t|t-1)'] \\ &= A(t)E\{[X(t)\tilde{b}(t|t-1) + v(t)]\cdot[\tilde{b}(t|t-1)'X(t)' + v(t)']\} \end{aligned}$$

$$= A(t)[X(t)P(t|t-1)X(t)' + R]$$

于是由关系式(12)可求出关于修正系数阵的表达式为

$$A(t) = P(t|t-1)X(t)'$$
$$[X(t)P(t|t-1)X(t)' + R]^{-1} \quad (18)$$

由上式及式(11)可求出下一时刻回归系数误差向量的估计。但是上式中包含预报均方误差阵的计算。从式(16)和式(8)可见,它又可转化为前一时刻滤波均方误差阵的计算。因为

$$P(t|t-1) = E[\bar{b}(t|t-1)\bar{b}(t|t-1)']$$
$$= E\{[\bar{b}(t-1|t-1) + w(t)] \cdot$$
$$[\bar{b}(t-1|t-1)' + w(t)']\}$$
$$= E[\bar{b}(t-1|t-1)\bar{b}(t-1|t-1)']$$
$$+ E[w(t)w(t)'] = P(t-1|t-1) + Q \quad (19)$$

$P(t-1|t-1)$表示前一时刻当步的回归系数向量的估计产生误差的协方差阵,它又称为该时刻滤波均方误差阵。那么,当步的滤波均方误差阵又如何计算呢?一般情况下,据式(11)、(15)t时刻的滤波均方误差阵可表示为

$$P(t|t) = E[\bar{b}(t|t)\bar{b}(t|t)']$$
$$= E\{\bar{b}(t|t-1) - A(t) \cdot$$
$$[X(t)\bar{b}(t|t-1) + v(t)]\} \times$$
$$\{\bar{b}(t|t-1) - A(t) \cdot$$
$$[X(t)\bar{b}(t|t-1) + v(t)]\}'$$
$$= P(t|t-1) - A(t) \cdot$$
$$[X(t)P(t|t-1)X(t)' + R]A(t)' \quad (20)$$

表明t时刻的滤波均方误差阵又可通过前一时刻的误差均方误差阵来计算。因此,如果给定随机向量$v(t)$和$w(t)$的协方差阵Q和R以及滤波均方误差阵的初始值,则可通过式(19)计算出下一时刻的误差均方误差阵,然后通过式(18)计算出当步的修正系数阵,又通过式(11)计算出当步的回归系数向量,最后通过式(20)计算出下一时刻的滤波均方误差阵的估计,如此逐步订正前一步回归系数向量,完成原MOS预报方程的卡尔曼滤波逐步订正。

如果式(4)的状态方程中转移矩阵不是单位阵时,类似地可导出

$$P(t|t-1) = \Phi(t,t-1) \cdot$$
$$P(t-1|t-1)\Phi(t,t-1)' + Q \quad (21)$$

在这种情况下计算时用上式代替式(19)即可。

2 实例

Kilpinen(1992)[3]对芬兰 Jokioinen 站地面气温的 MOS 预报用卡尔曼滤波作订正试验。他使用 HIRLAM 的数值预报模式(该模式为北大西洋和西欧地区的细网格模式)产生的24小时输出物理量作为预报因子,建立关于地面温度(y)的 MOS 预报方程

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + v \quad (22)$$

预报因子 x_1为该地附近网格点24小时模式预报地面温度预报值,x_2为925与700hPa之间的最大相对湿度,x_3为925hPa的湿度。利用资料计算出预报方程中回归系数作为卡尔曼滤波过程的回归系数向量的初始值,即

$$b(0) = \begin{bmatrix} 2.8 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

由于仅考虑某一时刻单个预报量的订正,式(2)中的随机向量蜕化为随机变量v,它的方差取为$R(0)=50$。在对描述状态向量(即回归系数向量)变化的协方差阵作估计时,认为其中各变量是相互无关的,即

$$Q(0) = \begin{bmatrix} 0.013 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.050 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.070 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.073 \end{bmatrix}$$

进而假设各回归系数误差变量之间是无关的,且它们变化的方差相等。这样初始滤波均方误差阵的估计为

$$P(0|0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

有上面各参数的初始值后，就可进入卡尔曼滤波过程的逐步计算，试验是在1991年冬季至1992年初的55天进行的。试验结果发现，回归系数逐日修正量不大，说明用 MOS 方程所作的回归系数的初始值估计是比较接近变化系统的期望值。由 MOS 方程可作出预报值的逐日修正。比较结果表明，在独立样本中 MOS 预报的均方误差为2.0℃，而使用滤波订正后的均方误差为1.3℃，显然滤波效果是十分明显的。

Simonsen(1991)[4]也使用北大西洋和欧洲地区细网格模式(DK-HIRLAM)对丹麦 De Bilt 站的地面温度作预报试验(1990年12月至1991年1月)。发现模式预报有系统偏差，在入冬期的暖期预报值往往比实际偏冷，但偏差不是很大，在严冬期的冷期预报值又往往比实际偏暖，且偏差较大。总体温度绝对值预报偏度为1.2℃。这种偏差是可观的。因此他对模式的温度预报值作卡尔曼滤波订正试验。由于无 MOS 资料，无法建立依赖样本的 MOS 预报方程，他用模式的温度预报值(x_1)和实测值(x_2)的线性组合作为预报值的量测方程，即

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + v \qquad (23)$$

对回归系数向量的初始值他取为

$$b(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这表明卡尔曼滤波仅对模式的预报值进行订正。他也假设各回归系数误差变量之间是无关的，且它们变化的方差相等，而且如果回归系数的初始值严格取为系统的真值时，其对应变化方差应为零值。但一般真值是未知数，因此他认为其方差值应尽量取大些，使得有较快的收敛速度。他对初始滤波均方误差阵的估计为

$$P(0|0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

随机变量 v 的方差取为 $R(0)=2$。状态向量的协方差阵的初始阵取为

$$Q(0) = (1/365)P(0|0)$$

卡尔曼滤波订正与模式的预报效果检验他使用关于平均绝对误差的技巧评分，其统计量为

$$ss = 1 - MAE/MAEC$$

其中 MAE 表示试验期样本平均绝对误差，$MAEC$ 表示以气候均值为预报值的平均绝对误差。计算表明未作卡尔曼滤波订正的模式预报技巧评分值为0.31，用上述滤波订正预报的技巧评分值为0.49，显示滤波有较大的提高。

经60天对回归系数向量的修正后，回归系数向量为

$$b(60) = \begin{bmatrix} -1.39 \\ 0.75 \\ 0.41 \end{bmatrix}$$

表明若用 MOS 资料用上述因子作预报时，方程中回归系数的值大体为这样的值。

他还作了另一方面试验，对回归系数向量的初始值他取为

$$b(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即卡尔曼滤波仅对模式的观测值进行订正。预报方程表现为持续性预报。经60天对回归系数向量的修正后，回归系数向量为

$$b(60) = \begin{bmatrix} -1.32 \\ 0.72 \\ 0.42 \end{bmatrix}$$

表明无论以哪种初始值出发，经长时间迭代后均趋于系统回归系数值。

Person(1991)[5]把卡尔曼滤波订正应用到瑞典 Lulea 站的温度预报上，模式预报是取自欧洲中期天气预报中心发布的数值模式预报。他使用的预报量为预报值与实测值之差(y)，用温度预报值和实测值为因子建立预报方程。卡尔曼滤波订正试验是在不同参

数模型上进行比较。

首先他用单参数模型作试验，模型中仅含数值模式预报误差值。用此模型对1988年11—12月期间逐日预报进行订正，发现不用滤波订正时11月份预报与实测值有一些偏差，但偏差值不大。但到12月中旬预报值有明显偏暖现象，且有较大的误差。用单参数滤波后偏差有所减小。原来在12月份平均绝对误差值为5.0℃，订正后为4.6℃。然后他又用2参数模型，即用模式预报值为因子(x_1)的量测方程，表为

$$y = b_0 + b_1 x_2 + v$$

用此模型订正效果有较大的改进。平均绝对误差值进一步下降到4.2℃。最后他用4参数的模型

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + v$$

作订正。模型中 x_1 为数值模式预报值，x_2 为850hPa 气温预报值，x_3 为06时温度预报误差值。修正结果又有更大的改进。

在长期预报上，Epstein 等人(1992)[6]用完全预报方法对美国109站1951—1990年月平均温度作预报，预报因子选自700hPa 高度场，结果对这一期间所有站平均的逐月月平均预报值与实测值进行比较后发现其平均温度误差值也是相当大的。因此他们提出用卡尔曼滤波作温度长期预报订正试验。

他们把40年的资料分为两个样本，前20(1951—1970)年为依赖样本，后20年(60个月)为独立样本。例如检查纽约航空站 LaGuardia 的2月份预报，其回归方程(包含3个因子)的复相关系数为0.76，回归方程的残差均方差为1.13℃，在独立样本中试报的均方误差为1.52℃，而用卡尔曼滤波订正后均方误差下降为1.44℃。说明滤波在长期预报中也有一定效果。

他们还给出对随机变量 v 及随机向量 w 的方差和协方差阵的初始值作不同选择的试验，发现它们对回归系数的订正并不敏感，说明用资料作回归系数的估计比较接近系统的期望值。随机变量的初始值对它们变化影响不大。

参考文献

1 黄嘉佑. MOS 方法的进展. 气象科技，1984年第3期：18—21.

2 黄嘉佑. 气象统计分析与预报方法. 北京：气象出版社，1990，387.

3 Kilpinen, J., The application of Kalman filter in statistical interpretation of numerical weather forecasts. Preprints 12th Conf. Probability and Statistics, Amer. Meteor. Soc., 1992: 11—16.

4 Simonsen, C., Self adaptive model output statistics based on Kalman filtering, The WMO Training Workshop on the Interpretation on NWP Products in Terms of Local Weather Phenomena and Their Verification Wageningen, The Netherlands. 1991.

5 Persson, A. O., Kalman filtering—— A new approach to adaptive statistical interpretation of numerical meteorological forecasts. The WMO Training Workshop on the Interpretation on NWP Products in Terms of Local Weather Phenomena and Their Verification Wageningen, The Netherlands. 1991.

6 Epstein, E. S. and E. A. O'Lenic., Kalman filter and regression, applications to specification and prediction, Preprints 12th Conf. Probability and Statistics, Amer. Meteor. Soc., 1992; 111—116.

The Application of Kalman Filter Technique to Weather Forecasting

Huang Jiayou　　Xie Zhuang

(Department of Geophysics, Peking University 100871)　(Beijing Meteorological Office, 100081)

Abstract

The application of Kalman filter technique to weather forecasting——short-range MOS forecasting and long-range forecasting——with its progress in recent years are summerized.

Key Words: Kalman filter　statistical-dynamic prediction　MOS prediction　long range ferecast