五点差分格式的试验研究及其最优方案

崔新强　　　　邱崇践

（武汉中心气象台）　　（兰州大学大气科学系）

提　　要

本文分析了五点差分格式，并在均匀旋转的风场条件下，采用各种不同的初值，对三维平流方程进行了长时间的数值积分，得到了一种最优五点差分方案。

一、引　言

目前在数值天气预报中，二阶精度的有限差分方案仍然是使用最多的方案。但已有不少人指出使用四阶精度差分方案的优越性[1]、[2]。伍荣生[3]指出，四阶差分方案可看作是一般五点差分方案的一个特例，适当地挑选系数可使差分解进一步逼近微分解。本文就是力求寻找这样一个最佳逼近系数。

二、一般的五点差分格式

任一物理量F(x)在k点的一阶导数可用下面的五点差分格式来逼近：

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_k=\left[(1-s)(F_{k+}-F_{k-1})+\frac{s}{2}(F_{k+2}-F_{k-2})\right]\Big/2h \qquad (1)$$

其中h为格距，s是可调系数。取$s=0$，则蜕化成三点中央差格式，取$s=-\frac{1}{3}$则成为熟知的四阶精度格式。若F为波动形式，即

$$F=e^{i\mu x} \qquad (2)$$

其中$i=\sqrt{-1}$，$\mu=\frac{2\pi}{L}$为波数，L为波长。

对一特定的波长$L_k=kh$（k为整数），可以找到系数s_k，使得差分格式（1）不存在截断误差。按（2）式有：

$$\frac{dF}{dx}=i\mu F \qquad (3)$$

将$F_k=e^{i\mu kh}$代入（1）式不难得出：

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_k=i\mu R_k F_k \qquad (4)$$

其中$R_k=\left[2(1-s_k)\sin\frac{2\pi}{k}+s_k\sin\frac{4\pi}{k}\right]\Big/\left(\frac{4\pi}{k}\right)$，比较(3)、(4)两式可知，须使$R_k=1$。满足这一条件的系数是

$$s_k=2\left(\frac{2\pi}{k}-\sin\frac{2\pi}{k}\right)\Big/\left(\sin\frac{4\pi}{k}-2\sin\frac{2\pi}{k}\right) \qquad (5)$$

当然，对于$L\neq L_k$的波分量，差分仍然存在误差，以R（差分值与微分值之比）作为衡量差分误差的标准，取各种不同的s_k值，计算出了不同波长下的R值，结果见表1。

各种差分格式的误差只是在波长小于10倍格距的短波部分才非常明显。由表1可以看出：①对于$-0.4650\leqslant s_k\leqslant-0.3611$的五点差分格式，其差分误差都比四阶精度和二阶精度小；②对于$s_k=-0.9460$的五点格式，其差分误差在所有波段上都比四阶精度的大；③对于$s_k=-0.5708$的五点格式，其误差在大于或等于5倍格距的波段上比四阶精度的大，而在波长小于5倍格距的短波部分却比四阶精度的小，因而总的效果是其精度

表 1　　各种五点格式在不同波长下的误差比较

k(或格式名称)	S_k	μh										π
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{10}$	
3	−0.9460	1.000	1.029	1.105	1.193	1.252	1.239	1.129	0.920	0.634	0.311	0
4	−0.5708	1.000	1.011	1.037	1.060	1.035	1.000	0.882	0.701	0.475	0.231	0
5	−0.4650	1.000	1.006	1.019	1.023	1.000	0.933	0.812	0.639	0.431	0.208	0
6	−0.4184	1.000	1.004	1.010	1.006	0.976	0.903	0.781	0.612	0.411	0.199	0
7	−0.3933	1.000	1.003	1.006	0.998	0.963	0.887	0.764	0.598	0.400	0.193	0
10	−0.3611	1.000	1.001	1.000	0.936	0.946	0.867	0.743	0.579	0.387	0.186	9
四阶精度	$-\frac{1}{3}$	1.000	1.000	0.995	0.976	0.941	0.849	0.725	0.563	0.375	0.180	0
二阶精度	0	1·000	0.984	0.935	0.858	0.757	0.637	0.505	0.368	0.234	0.109	0

与四阶精度相当；④对于$s_k=-0.4650$的五点格式，当波长小于或等于5倍格距时，其误差比$s_k=-0.4184$的五点格式的小，只是当$\mu h=\frac{3\pi}{10}$时其精度才不如$s_k=-0.4184$的五点格式，至于在其它的波段上，这两种格式的精度相差甚微，考虑到短波部分的误差在4倍格距的波段上最为明显，因而总的表现仍然是$s_k=-0.4650$的五点格式的精度比$s_k=-0.4184$的高。同理，$s_k=-0.4184$的五点格式的精度比$s_k=-0.3933$的高，依次可类推到$s_k=-0.3611$，所以，$s_k=-0.4650$是这一组方案中精度最高的一种，我们称其为最优五点差分格式。

另外，在波动方程中，空间差分近似还会引起相速度误差，考虑下面的一维浅水波方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-fv+g\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial t}+fu=0\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial t}+H\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases}\qquad(6)$$

若令：$\begin{pmatrix}u\\v\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{u}\\\hat{v}\\\hat{z}\end{pmatrix}e^{i(\mu x-\sigma t)}$

代入（6）式得频率方程

$$\left(\frac{\sigma}{f}\right)^2=1+\lambda^2\mu^2\qquad(7)$$

其中$\lambda=\sqrt{gH}/f$ 为变形半径

对于A格式的差分形式的浅水波方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-fv+g\,\overline{z}^{x}_{x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial t}+fu=0\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial t}+H\overline{u}^{x}_{x}=0\end{cases}\qquad(8)$$

若令：$\begin{pmatrix}u_{m,l}\\v_{m,l}\\z_{m,l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{u}_{m,l}\\\hat{v}_{m,l}\\\hat{z}_{m,l}\end{pmatrix}e^{i(\mu mh-\sigma t)}$

空间导数采用形如（1）式的形式，代入（8）式得五点差分格式的频率方程为

$$\left(\frac{\sigma}{f}\right)^2=1+\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2A^2\qquad(9)$$

其中$A=(1-s)\sin\mu h+\frac{s}{2}\sin 2\mu h$。

取$\lambda=2$，计算不同波长下的σ/f，结果如附图所示。

分析附图，我们得出的结论与前面的讨论完全一致。从图上也可以很直观地看出$s_k=-0.4650$的差分格式的计算结果与真解最为接近。因此，$s_k=-0.4650$即为我们所寻找到的差分与微分的最佳逼近系数。

三、平流方程的数值试验

为了进一步检验上面的分析，我们在均匀旋转的风场条件下，采用不同系数的五点

差分方案，对二维平流方程进行了长时间的数值积分。

对于任一被平流的物理量C，其输送过程可以表述为

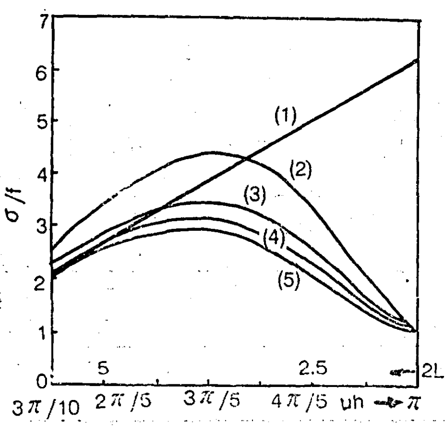
$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}=0 \qquad (10)$$

其中$u(x,y)$、$v(x,y)$分别是x方向和y方向的风速分量。

初值$C(x,y,0)$取如下形式：

$$C(x,y,0)=\begin{cases}C_0\left(1+\cos\frac{\pi r}{4}\right) & r\leqslant R_0\\ 0 & r>R_0\end{cases} \qquad (11)$$

其中$r=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}$，$(x_0,y_0)$为圆锥中心的位置，$C_0$为平流量$C$的振幅，$R_0$为圆锥的半径。



附图 几种五点格式的相速度误差

(1)准确解，(2)$S_k=0.9460$，(3)$S_k=-0.5708$，(4)$S_k=-0.4650$，(5)$S_k=-\frac{1}{3}$

风场取以Ω为角速度的均匀旋转风场

$$\begin{cases}u=-\Omega(y-y_p)\\ v=\Omega(x-x_p)\end{cases} \qquad (12)$$

其中(x_p,y_p)为均匀旋转风场的中心位置，角速度$\Omega=2\pi/T$，T为周期，即经过T时刻旋转风场刚好转过一圈回到原来的位置。

试验中，对平流方程(10)在离散的网格点上求数值解。取空间格距$\Delta x=\Delta y=h$，时间步长为Δt，x方向和y方向的格点数为N，取$x=lh,y=mh,t=n\Delta t$，其中$l=1,2,\cdots,N$；$m=1,2,\cdots,N$；$n=0,1,2,\cdots,T$。这样，可以将$C(x,y,t)$写成$C(x,y,t)=C_{l,m}^{n}$形式，于是在离散格点上平流方程可以写为：

$$C_{l,m}^{n+1}=C_{l,m}^{n-1}-2\Delta t\left[u_{l,m}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{l,m}^{n}+v_{l,m}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{l,m}^{n}\right] \qquad (13)$$

时间中央差用了数值预报中常用的“三步法”起步，空间导数采用

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{l,m}^{n}=\left[(1-s_k)\left(C_{l+1,m}^{n}-C_{l-1,m}^{n}\right)+\frac{s_k}{2}\left(C_{l+2,m}^{n}-C_{l-2,m}^{n}\right)\right]\Big/2h$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{l,m}^{n}=\left[(1-s_k)\left(C_{l,m+1}^{n}-C_{l,m-1}^{n}\right)+\frac{s_k}{2}\left(C_{l,m+2}^{n}-C_{l,m-2}^{n}\right)\right]\Big/2h$$

取$h=1$，$\Delta t=120$，$N=33$，$x_0=17$，$y_0=7$，$x_p=17$，$y_p=17$，$\Omega=1.7453292\times10^{-4}$，$T=300\times120$，初值取以下不同的四种：①$R_0=4h,C_0=50$；②$R_0=2h,C_0=50$；③$R_0=4h,C_0=25$；④$R_0=4h,C_0=75$，因此积分一个周期正好为300步，两个周期为600步。

初值取第一种形式，积分一个周期。数值结果如表2所示。

表中符号Σ：$\sum_{i,j=1}^{N}C_{ij}^{n}$，$\Sigma_0$：$\sum_{i,j=1}^{N}C_{ij}^{0}$，$\Sigma^2$：$\sum_{i,j=1}^{N}(C_{ij}^{n})^2$，$\Sigma_0^2$：$\sum_{i,j=}^{N}(C_{ij}^{0})^2$，$C_{max}$、$C_{min}$分别为格点上$C$的最大值和最小值，$(x_T,y_T)$为积分一个周期以后$C_{max}$的格点坐标，$\lambda_\theta=\theta-360°$为位相误差，以度为单位。$s_k=-0.438$和$s_k=-0.502$为伍荣生曾经求得的最佳系数，为便于比较，将其结果也列于表中。从表2可以看到，以$s_k=-0.4650$的五点格式最好，当积分一个周期之后，圆锥峰值仅衰减3.2%，这是其它方案所达不到的，它的精度远远高于四阶精度方案，既使与伍荣生的方案相比也略高一点。表3给出了取后三种初值的数值结果。

表 2　　平流方程数值解的精度(1)

S_k	Σ	Σ/Σ_0	Σ^2/Σ_0^2	C_{max}	C_{min}	(x_T, y_T)	λ_θ
−0.9460	1440.600	0.963	1.000	42.5	−34.1	(21,9)	26.57
−0.5708	1486.793	0.994	1.000	84.3	−27.6	(20,7)	18.55
−0.4650	1497.883	1.001	1.000	96.8	−12.2	(18,7)	5.71
−0.4184	1506.492	1.007	1.000	93.6	−7.2	(17,7)	0
−0.3933	1510.057	1.009	1.000	92.2	−9.6	(17,7)	0
−0.3611	1517.477	1.014	1.000	87.9	−13.9	(16,7)	−5.71
$-\frac{1}{3}$	1522.199	1.017	1.000	85.3	−15.8	(16,7)	−5.71
0	1553.302	1.038	1.000	52.1	−25.2	(13,8)	−23.96
−0.438	1503.725	1.005	1.000	93.2	−8.2	(18,7)	5.71
−0.502	1498.035	1.001	1.000	95.7	−16.8	(19,7)	12.57

表 3　　平流方程数值解的精度(2)

S_k	初值	积分步数	Σ	Σ/Σ_0	Σ^2/Σ_0^2	C_{max}	C_{min}	(x_T, y_T)	λ_θ
$-\frac{1}{3}$	$R_0=2h$	300	918.912	0.988	1.000	68	−25	(16,8)	−6.34
	$C_0=50$	600	1003.707	1.079	1.000	57	−25	(16,7)	−5.71
	$R_0=4h$	300	761.071	1.017	1.000	43	−8	(16,7)	−5.71
	$C_0=25$	600	763.436	1.020	1.000	37	−10	(16,7)	−5.71
	$R_0=4h$	300	2283.345	1.017	1.000	128	−24	(16,7)	−5.71
	$C_0=75$	600	2290.469	1.020	1.000	110	−31	(16,7)	−5.71
−0.4650	$R_0=2h$	300	890.562	0.957	1.000	90	−16	(18,7)	5.71
	$C_0=50$	600	892.611	0.960	1.000	76	−22	(20,7)	18.55
	$R_0=4h$	300	748.913	1.001	1.000	48	−6	(18,7)	5.71
	$C_0=25$	600	744.440	0.995	1.000	43	−11	(19,7)	12.57
	$R_0=4h$	300	2246.866	1.001	1.000	145	−18	(18,7)	5.71
	$C_0=75$	600	2233.493	0.995	1.000	128	−32	(19,7)	12.57

从表3可以看到，无论是处理不同物理量的输送问题，还是处理不同尺度的输送问题，最优五点差分格式的精度都要比四阶精度格式高得多，在同等条件下，其积分两个周期的精度与四阶精度格式积分一个周期的精度相当。

四、结语

我们注意到，最优五点差分格式与四阶精度格式的计算量是完全相等的，但其精度却远远高于四阶精度方案，与陈雄山[4]的谱导数方案相比，精度几乎相当。

参考文献

[1] Kreiss, H., Comparsion of accurate methods for the integration of hyperbolic equations, Tellus, 24(1972), No.3, 199−215。

[2] Kalang-Rivas, E., A. Baylis, and J. Storch, Experiments with the 4th order Giss general circulation model, Simulation of large-scale atmospheric processes, Annalen der Meteorologic(Neue Folge) Nr.11, 25-27, 1976。

[3] 伍荣生.提高差分与微分逼近程度的一个新方案 大气科学, Vol.3, No.2, 1979。

[4] 陈雄山，平流方程的数值研究，大气科学，Vol.3, No.2, 1979。

（下转第42页）

（上接第14页）

An experiment and study of the five-point finite difference scheme

Cui Xinqiang (Meteorological Observatory, Wuhan Center)
Qui Chongjian (Department of Atmospheric Science, Lanzhou University)

Abstract

In this paper, the five-point finite difference scheme is analysed. And by the uniformlly rotational velocity field along with the various initial conditions, a two-dimentional advection equation is integrated numerically in a long period, an optimum five-point finite difference scheme is achieved.