关于假相当位温的精确计算

李任承　　顾光芹

（河北省气象学校）（河北省气象局）

提　　要

本文根据假相当位温的含义，得到了它的准确表达式。计算了假相当位温的标准值，给出了适用于气象业务工作中实用的公式，建议在有计算机的业务部门使用。

一、前　　言

在教科书中，假相当位温的含义是：饱和（或未饱和）湿空气块在绝热上升（先是干绝热上升到达凝结高度以后再湿绝热上升）过程中，在气块本身维持饱和的状态下，凝结出来的液态水立即脱离上升气块，直到该空气块所具有的水汽全部凝结完毕并脱落以后，该空气块所具有的位温称为假相当位温。这样的过程称为假绝热过程。

根据上述含义，某一（饱和或未饱和）湿空气块，它的假相当位温应当是唯一的，完全由该空气块的初始状态（温度、气压和湿度）所决定，并且在假绝热过程中是完全保守的。但是，由于对假绝热微分方程进行精确积分是不可能的。因此，一般的气象学教科书中只给出了假相当位温的近似表达式[1]，[2]，并且用热力学函数 θse的值代替假相当位温值。对于饱和湿空气块有：

$$\theta se \equiv \theta d \exp\left(\frac{L_V W_S}{c_{pd} T}\right) \tag{1}$$

对于未饱和的湿空气块有：

$$\theta se_K \equiv \theta d_K \exp\left(\frac{L_{VK} W_{SK}}{c_{pd} T_K}\right) \tag{2}$$

（1）式中L_V为水汽潜热，它是温度的函数；W_S为饱和混合比；θd为干空气的分位

温；c_{pd}为干空气的定压比热；T为绝对温度；(2) 式中带下标"K"的物理量表示凝结高度处的值（下同）。

由于(1) 式和(2) 式并不是假相当位温的确切表达式，因此，根据(1) 式和(2) 式计算的假相当位温与气块的实际假相当位温是有差别的：用(1) 式和(2) 式计算的假相当位温一般要低于气块的实际假相当位温，特别是在温度较高、气压较低、湿度较大的情况下，这种差别就更为显著，有时可达几度甚至十多度；此外，由(1) 式所定义的热力学函数 θse 在假绝热过程中是不保守的，它随着气块上升高度的增加而增大，并逐渐趋近于气块的实际假相当位温。

辛普森（Simpson, R·H）于1977年曾经提出了一个考虑水质比热的假相当位温计算公式[3]。不过，用他所给出的公式计算的结果与气块的实际假相当位温仍然存在不小的误差。

我们根据假相当位温的含义，提出了假相当位温的准确表达式，计算了假相当位温的标准值，并给出了适用于气象业务工作的精确计算公式。

二、假相当位温的标准值

假绝热过程的变态微分方程为：

$$(c_{pd}+W_S c_W)d\ln T-R_d d\ln(p-E)+d\left(\frac{L_V W_S}{T}\right)=0 \qquad (3)$$

式中c_W为液态水的比热，R_d为干空气的比气体常数，E为饱和水汽压，p为大气压强。

将(3) 式由气压为p_1的高度到气压为p_2的高度（相应的温度由T_1降到T_2）进行积分，根据积分中值定理可得：

$$(c_{pd}+\overline{W}_S c_W)\ln\frac{T_2}{T_1}-R_d\ln\frac{p_2-E_2}{p_1-E_1}+\frac{L_{v2}W_{S2}}{T_2}-\frac{L_{v1}W_S}{T_1}=0 \qquad (4)$$

式中$\overline{W}_S$为p_1到p_2之间的平均饱和混合比。我们又可将(4) 式写做：

$$\theta se_2=\theta se_1\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\overline{W}_S\cdot c_W/c_{pd}} \qquad (5)$$

式中$\theta se_1=T_1\left(\dfrac{1000}{p_1-E_1}\right)^{Rd/c_{pd}}\cdot\exp\left(\dfrac{L_{v1}W_{S1}}{c_{pd}T_1}\right)$

$$\theta se_2=T_2\left(\frac{1000}{p_2-E_2}\right)^{R_d/c_{pd}}\cdot\exp\left(\frac{L_{v2}W_{S2}}{c_{pd}T_2}\right)$$

由(5) 式可以看出：由于$T_1>T_2$，$\overline{W}_S>0$，因此$\theta se_2>\theta se_1$。这说明，在假绝热过程中，热力学函数θse是随着气块上升高度的增加而增大的。当$W_S\to 0$时，θse便趋于最大值，这便是实际的假相当位温。这时，我们用θ*ae表示实际的假相当位温。即：

$$\theta^*ae=\lim_{W_S\to 0}\theta se \qquad (6)$$

根据(5) 式，我们应用逐步逼近法便可以计算假相当位温的标准值。从理论上说，在计算过程中步长取得越小越好。实际上，在一般情况下我们取(p_1-p_2)的步长只要小于10hPa就已相当准确了（误差不超过0.1℃）。表1是根据(5) 式令$\overline{W}_S=\frac{1}{2}(W_S+W_{S2})$，当$\theta se_K<350$K时，取$p_1-p_2=10$hPa；当$\theta se_K\geqslant 350$K时，取$p_1-p_2=1$hPa，用逐步逼近法求得的假相当位温的基准值，其误差不超过0.01℃。用其它方法求得的结果与此相同。因此，表1可做为实际假相当位温的标准值。

三、假相当位温的准确表达式及其精确计算公式

在(4) 式中，令$p_1=p_K$，$p_2=p_n$，相应地，$T_1=T_K$，$T_2=T_n$。其中T_n是饱和湿空气块上升到水汽含量可以忽略不计的高

表1　　**假相当位温的标准值（单位：°C，精确到0.01°C）**

P(hPa) \ θ*ae(℃) \ t(℃)	−50	−40	−30	−20	−10	0	5	10	15	20	25	30	35	40
1000		-39.68	-29.14	-17.88	-5.15	-10.44	20.03	31.42	45.27	62.50	84.47	113.16	151.67	205.03
900	-43.06	-32.51	-21.58	- 9.83	3.61	20.34	30.79	43.32	58.74	78.17	103.25	136.50	181.87	
850	-39.26	-28.52	-17.38	- 5.35	8.50	25.91	36.87	50.10	66.47	87.25	114.26	150.36	200.12	
800	-35.17	-24.23	-12.85	- 0.51	13.81	31.98	43.52	57.55	75.03	97.36	126.64	166.13	221.14	
700	-25.9	-14.48	- 2.55	10.52	25.98	46.00	59.00	75.03	95.31	121.66	156.85	205.33		
600	-14.74	- 2.75	9.87	23.88	40.78	63.41	78.43	97.28	121.59	153.81	197.85			
500	- 0.88	11.83	25.35	40.63	59.60	85.95	103.97	127.08	157.59	199.11				
400	17.11	30.8	45.56	62.69	84.79	117.03	139.92	170.13	211.29					
300	42.1	57.21	73.88	94.02	121.51	164.39	196.48							
200	81.10	98.64	118.81	144.95	184.03									

度时的温度，这时$W_s \to 0$，令$\overline{W}_s = MW_{SK}$　　(7)

式中M仅仅是W_{SK}的函数，于是，我们得到假相当位温的准确表达式为：

$$\theta^*ae = \lim_{T \to T_n} \theta se = \theta se_K \left(\frac{T_K}{T_n}\right)^{MW_{SK}c_W/c_{pd}} \tag{8}$$

(8) 式虽然是假相当位温的准确表达式，但是却不便于实际应用。为了得到业务中实用的假相当位温的精确计算公式，我们对(3)式中的有关项做如下积分：

$$\int_{T_N}^{T_K} W s d\ln T = \int_0^{W_{SK}} d(Ws\ln T) - \int_0^{W_{SK}} \ln T dWs \tag{9}$$

引入克劳修斯-克拉珀龙方程。

$\frac{dE}{E} = \frac{L_V dT}{R_V T^2}$，将$L_V$视为常数并用$L_0$代替，则有：

$$\ln\frac{E}{E_0} = \frac{L_0}{R_V}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) \tag{10}$$

从而得：

$$-\ln T = \ln\left(\frac{1}{T_0} - \frac{R_V}{L_0}\ln\frac{E}{E_0}\right) \tag{11}$$

将(11) 式代入(10) 式，并且令$\overline{E}$为E的平均值。则有：

$$\int_{T_N}^{T_K} W_s d\ln T = W_{SK}\ln T_K - W_{SK}\ln\left(\frac{1}{T_0} - \frac{R_V}{L_0}\ln\frac{\overline{E}}{E_0}\right) \tag{12}$$

因为$T \to T_N$时，$E \to 0$令$\overline{E} = \frac{E_K}{N}$，则有：

$$\int_{T_N}^{T_K} W s d\ln T = W sk\ln\left(1 + \frac{R_V T_K}{L_0}\ln N\right) \tag{14}$$

其中N为W_{SK}的函数，即$N = f(W_{SK})$。

将(3) 式由T_K到T_N进行积分，并将(13) 式的结果代入，则得到假相当位温的精确计算公式。我们用θae表示计算值，以便与θ*ae相区别，即：

$$\theta ae = \theta se_K \left(1 + \frac{R_V T_K}{L_0}\ln K\right)^{W_{SK}c_W/c_{pd}} \tag{14}$$

令$N = A + BW_{SK} + CW_{SK}^2 + \cdots\cdots$，做为近似仅取前三项，通过与假相当位温的标准值(表1)对照，便可求得A、B、C的值。通过验证，我们取如下表达式：

$$N = 3 + 70W_{SK}(1 + 5W_{SK}) \tag{15}$$

表2便是由 (14) 式计算的结果。与表1相比较，最大误差不超过0.02℃。

表1和表2在计算过程中，有关物理量取值如下：$T_0 = 273.15$K；$E_0 = 6.107$hPa；$L_0 = 2500800 \mathrm{Jkg^{-1}}$；$R_d = 287.05 \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$；$R_V = 461.5 \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$；$c_{pd} = 1005 \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$；$c_{PV} = 1850 \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$；

表2　　用公式14计算的假相当位温值表(与标准值比较，最大误差不超过0.02℃)

P(haP) \ t(℃) θac(℃)	−50	−40	−30	−20	−10	0	5	10	15	20	25	30	35	40
1000		-39.68	-29.13	-17.88	−5.15	10.44	20.02	31.40*	45.25*	62.48*	84.45*	113.15	151.68	205.03
900	-43.06	-32.51	-21.58	-9.83	3.60	20.33	30.77*	43.31	58.72*	78.15*	103.24	136.50	181.89*	
850	-39.26	-28.52	-17.38	-5.35	8.50	25.90	36.85*	50.08*	66.45*	87.23*	114.25	150.37	200.14*	
800	-35.17	-24.22	-12.85	-0.51	13.80	31.97	43.51	57.53*	75.01*	97.35	126.64	166.14	221.15	
700	-25.89*	-14.48	-2.55	10.52	25.94	45.99	58.98*	75.01*	95.29*	121.65	156.86	205.35		
600	-14.73*	-2.75	9.87	23.88	40.77	63.40	78.41*	97.26*	121.57*	153.81	197.87*			
500	-0.88	11.84	25.35	40.63	59.59	85.94	103.95*	127.07	157.59	199.13*				
400	17.11	30.80	45.56	62.69	84.79	117.01*	139.90*	170.13	211.31					
300	42.1	57.21	73.88	94.02	121.51	164.39	196.49							
200	81.10	98.64	118.81	144.94	184.03									

*　误差等于0.02

$c_W = 4218 \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$。

汽化潜热定义为温度的线性函数：

$$L_V = L_0 - (c_W - c_{pv})(T - T_0) \qquad (16)$$

饱和水汽压由克劳修斯-克拉珀龙方程取积分求取。采用以下经验公式：

$$\ln E = \ln E_0 + \frac{c_L}{R_V}\ln\frac{T_0}{T} + \frac{(\overline{L} + c_L T_0)(T - T_0)}{R_0 T_0 T} \qquad (17)$$

式中$c_L = 2236 \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$, $\overline{L} = 2501600 \mathrm{Jkg^{-1}}$由（17）式计算的饱和水汽压与湿度查算表（甲种本）相当一致，最大误差不超过0.001hPa。

对于未饱和湿空气，凝结高度上的T_K和p_K由下列方程组求取：

$$\begin{cases} \dfrac{p}{p_K} = \left(\dfrac{T_0}{T_K}\right)^{\chi} \\ \dfrac{p}{p_K} = \dfrac{E(T_d)}{E(T_K)} \end{cases} \qquad (18)$$

式中

$$x = \frac{c_{pd}}{R_d}\left(1 + \frac{c_{pv}}{c_{pd}}W_0\right)\Big/\left(1 + \frac{R_v}{R_d}W_0\right)$$

Td是露点，W_0是混合比：

$$W_0 = \frac{R_d}{R_v}\frac{E(Td)}{p - E(Td)}$$

四、结　束　语

当前我国气象业务中求取假相当位温的途径是：（1）查表；（2）查T-lnp图解（气图5204）；（3）计算机计算。但是，由于假相当位温查算表大多是根据(1) 式和(2) 式计算的，这比由T-lnp图解查算的值普遍偏低，有时偏差可达几度甚至十多度，这在天气分析和预报中是不可忽视的误差。因此国内有些同志建议用(1) 式对T-lnp图解进行修正[4]。我们认为这是不妥当的。通过比较，我们发现用T-lnp图解查算的假相当位温与假相当位温标准值比较接近，所以T-lnp图解仍可作为气象业务中查算假相当位温的工具。当然，该图解也存在一定误差，仍有改进的必要。不过，不应当根据θse(即(1) 式的计算值）来修正，而应当根据假相当位温的标准值 θ*ae 来加以修正。

表3是θse（由(1)式计算）、θ′se（由T-lnp图解查算）以及θ′se－θse、θ*ae－θse、θ*ae－θ′se的比较表。由表3可以看出：在温

表 3　1000/700hPa的θse（由1式计算），θ′se（由T—lnp图查算）以及θ′se−θse，θ*ae−θse，θ*ae−θ′se

t（℃）／项目	0	5	10	15	20	25	30	35	40
θes	10.17/45.56	19.61/58.29	30.77/73.91	44.26/93.54	60.93/118.81	82.00/152.18	109.23/197.47	145.27	194.32
θ′se	11.5/47	21.5/61	32.5/76	46.5/96.5	46/123	86/158	114/206	152.5	206
θ′se−θse	1.33/1.44	1.89/2.08	1.73/2.09	2.44/2.96	3.07/4.19	4.0/5.82	4.77/8.53	7.23	11.681
θ*ae−θse	0.27/0.44	0.42/0.71	0.65/1.12	1.01/1.77	1.57/2.85	2.47/4.67	3.93/7.86	6.40	10.71
θ*ac−θ′se	−1.06/−1.0	−1.47/−2.0	−1.08/−0.97	−1.23/−1.19	−1.5/−1.34	−1.53/−1.15	−0.84/−0.67	−0.83	−0.97

度较高的时候，θ′se−θse可达几度甚至十多度，θ*ae−θse也可达几度甚至十多度；而θ*ae−θ′se绝对值一般不超过2℃。

在目前计算机已经比较普及的情况下，应用本文所给出的计算公式（即(15)式）计算假相当位温是比较迅速而精确的办法，建议采用。

参 考 文 献

[1] 杨大升等，动力气象学，气象出版社，1983。

[2] 沈德昌等，大气物理学，中国人民解放军空军气象学院，1984。

[3] Simpson, R.H, On the computation of equivalent potential temperature. Mon. Wea Rev. No.1, 106.

[4] 曲延禄，张道程，对温度对数压力图解的一个修正，气象，2—5，No.1，1982。

On the accurate calculation to the pseudo-equivalent potential temperature

Li Rencheng　　Gu Guangqin

(Hebei Meteorological School)　(Meteorological Bureau, Hebei Province)

Abstract

In this paper, the correct expression and the accurate calculation scheme are presented in regard to pseudo-equivalent potential temperature. It is applicable to weather analysis and meteorological research.