

计算散度的三点法比较及订正新方案*

崔 一 峰

(水电部南京水文水资源研究所)

提 要

计算散度的三点法有许多形式。对这些形式的联系和区别,有必要作出统一评价。经数学演绎后,得出这些方法实质上一致,方法之间或完全相等,或相差一个可忽略的微量。此外,为弥补三点法面积形状各异造成的误差,提出了订正新方案,为计算大范围散度场统一评价提供了方便。最后进行了实例验证。

一、引 言

散度计算有客观分析法、曲面拟合法及三角形法等许多形式,这些方法各有其优缺点及适用范围,在计算大范围散度时得以共存,相互补充。但由于散度值对风的偏差十分敏感,当风速偏差5%时,可导致散度100%的误差^[1]。因此采用客观分析或人工插值,降低了资料精度,而三点法可避免这个缺陷,这种方法直接采用观测资料进行计算,不经客观分析,计算精度相应提高,且方法简单易行,故至今仍被人们所接受。

三点法的始祖是 Bellamy (1949)^[2],这种方法现已发展成许多形式,它们之间存在一定的联系和区别,需要作出统一评价。此外,有必要克服三点法各三角形面积形状相异、不适宜大范围比较的不足,给出订正方案。本文就这些问题进行了初步的探讨。

二、三点法的比较与评价

目前常用的三点法(含有限元法)可归纳为5种:

- 1) 相对膨胀率法^[2]; 2) 平均风矢法^[3];
- 3) 矢量代数法^[4]; 4) 有限元法^[1];

5) 球面三角形法^[5]。

从数学定义及公式演绎的角度对上述5种方法进行比较。

首先,将这5种方法根据出发点的不同进行分类,分类如下:

第一类:由高斯定理(即散度定义)出发

$$\begin{aligned} D &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\iint_S (\nabla \cdot V) d\sigma}{S} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\oint V_n dl}{S} \\ &= \frac{1}{S} \sum_i V_{ni} \Delta l_i \end{aligned} \quad (1)$$

方法1、2、5均由此定义出发。

第二类:由直角坐标系中散度公式出发

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2)$$

方法4是由此公式导出。

第三类:从面积相对膨胀率概念出发

$$D = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \frac{\Delta S}{S \Delta t} \quad (3)$$

* 本文得到刘国伟高级工程师指导,谨此致谢。

1) 丁士晟,用有限元法计算散度、涡度等物理量,新疆气象,1981年第2期。

2) 文中外文斜黑体均为矢量。

方法3由此概念出发。

这三种散度定义实质上是相同的。散度最初的物理定义是：设M是区域A内一点，S是A的边界曲面，S方向为外法向。当区域

$$A \text{ 缩小到 } M \text{ 点时, 如果极限 } \lim_{A \rightarrow M} \frac{\oiint (s) V ds}{A}$$

存在，就称此极限为矢量V在M点的散度，

$$\text{定义为 } \operatorname{div} V / M = \lim_{A \rightarrow M} \oiint V \cdot dS / A$$

(对于单位厚度， $\operatorname{div} V = \lim \oiint v_n dl / S$)。

$$V = ui + vj + wk$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

$$\therefore \oiint V \cdot dS = \iiint \nabla \cdot V dA = [\nabla \cdot V(M_0)] A$$

$$\therefore \lim_{A \rightarrow M} \frac{\oiint V \cdot dS}{A} = \lim_{A \rightarrow M} [\nabla \cdot V(M_0)]$$

$$= \nabla \cdot V(M) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\therefore \operatorname{div} V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

又设 $V = ue_1 + ve_2 + we_3$ ，计算 $\Lambda(S)$

$$\rightarrow \Lambda(S') / \Lambda(S') = \iiint_{S'} d\lambda d\mu d\gamma$$

$$= \iiint_s \left| \frac{\partial(\lambda, \mu, \gamma)}{\partial(\xi, \eta, \xi)} \right| d\xi d\eta d\xi$$

其中

$$\frac{\partial(\lambda, \mu, \gamma)}{(\xi, \eta, \xi)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \delta t - \frac{\partial u}{\partial y} \delta t - \frac{\partial u}{\partial z} \delta t \\ \frac{\partial v}{\partial x} \delta t + \frac{\partial v}{\partial y} \delta t - \frac{\partial v}{\partial z} \delta t \\ \frac{\partial w}{\partial x} \delta t - \frac{\partial w}{\partial y} \delta t + \frac{\partial w}{\partial z} \delta t \end{vmatrix}$$

$$= 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta t + O(\delta t^2)$$

$$\Lambda(S') = \iiint_s (1 + \operatorname{div} V \delta t) d\xi d\eta d\xi$$

$$= (1 + \operatorname{div} V \delta t) \Lambda(S)$$

$$\therefore \operatorname{div} V = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(S') - \Lambda(S)}{\Lambda(S) \delta t} \quad (R \text{ 为小})$$

球半径)

对水平散度

$$S' = \iint \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta t + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta t^2 \right] d\xi d\eta$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \sim 10^{-5}; \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \sim 10^{-10}; \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \text{ 项即变形项可略去。}$$

$$\therefore \operatorname{div} V = \sigma \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{S' - S}{S \delta t}$$

于是，对于水平散度有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\oiint V_n dl}{S} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$$

由上可见，第一、二类计算方法是相等的，而第三类计算方法仅有微小差别。

事实上，将平均风矢法中计算公式^[3]进行分解，就不难看出与有限元计算公式完全相同；同样可用初等几何的方法，证明相对膨胀率法^[2]与有限元法或平均风矢法等同。矢量代数法^[4]与上述方法不同之处，在于多了风速非线性项。如前所述，该项量级为 10^{-10} ，相对 10^{-5} 量级的散度是很小的量，并不影响结果精度。至于球面三角形引进了球面的概念，理论上此方法应该更接近实际情况，但有计算表明，用平面代替球面带来的误差很小，一般不超过5%^[1]。而实测风等其它重要误差已经超过它，计算结果能有 10^{-6} 精度就可以了，实无必要追求更高精度。

因此，5种计算散度的三点法是等价的，或完全相等，或相差一个可以忽略的微量。文献^[4]所指经典方法^[2]计算有重算、漏算问题，实在是微乎其微的。

必须指出，5种方法除第3种外都有一个前提条件，即假定散度沿空间呈线性变化。此假定通常（特别是做气候学计算时）

误差并不大,只在局地有急流、强的风切变情况下带来一些误差。

由于以上5种方法实质上相等或相近,在选择何种方案时,只要其简单明了,物理概念清楚即可。第1种方法计算散度时,必须先给出三角形的各边、高及内角,但这6个值只有4个自由度,有两个量应由其它各项来确定,所以在用文献[6]的参数表时,会出现即使三点风速风向完全一致,散度也不为零的结果,为此,需求出这两个量的函数关系^[7];第5种方法比其它方法计算要复杂一些,前面已述,用球面计算增加了不必要的工作量。所以选第2、3、4种方法计算更为合适方便。本文计算实例中采用了矢量运算法,同时考虑了地图投影修正。

三、三点法的订正方案

(一) 面积形状订正

应用三角形法时,由于三角形位置是探空站直接决定的,面积形状各异,这给统一评价计算大范围散度场带来一定困难。有必要了解三角形的面积、形状与散度量级的关系并做适当订正。

近似地可以列出如下函数关系:

三角形平均散度 = f (各端点风速、风向,三角形面积,三角形形状)。

散度随面积增加而减小,但它们之间是线性关系还是非线性关系,尚无人进行研究。为此作者根据1983年部分实测资料,点绘了正三角形下面积与散度曲线(图1中实线)。结果发现,本例中在给定各端点某一速度后,当面积从1.4万 km^2 增加到11万 km^2 时,散度由 -1.4×10^{-5} 降到 -3.7×10^{-5} ,其曲线形状呈非线性。当给出不同速度时,所得面积与散度曲线趋势相近。为消除面积对散度的影响,用 $D_i' = KD_i$ (K 为系数)来对第 i 个三角形作订正, K 大致是第 i 个三角形与平均三角形面积的比值,有人取 $K =$

$S_i/\bar{S}$,有人取 $K = (S_i/\bar{S})^{\frac{1}{2}}$ 作。者在PC-1500机上进行模拟,假设

$$\begin{aligned} K_1 &= (S_i/\bar{S})^{\frac{1}{2}}, K_2 = (S_i/\bar{S})^{\frac{1}{3}}, \\ K_3 &= (S_i/\bar{S})^{\frac{1}{2.4}}, K_4 = S_i/\bar{S} \\ K_5 &= \frac{a_0 + a_1\bar{S} + a_21/\bar{S}}{a_0 + a_1S_i + a_21/S_i} \end{aligned} \quad (4)$$

模拟结果见图1。由图1可见,取系数 K_1 时最为理想,即这时散度受面积的影响最小,而取 K_4 时订正效果最差,说明不能用 $S_i/\bar{S}$ 来订正。

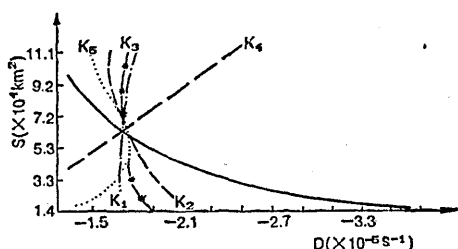


图1 正三角形面积与散度的关系
散度对面积的订正采纳:

$$D_i' = (S_i/\bar{S})^{\frac{1}{2}} D_i \quad (5)$$

其中 $\bar{S}$ 为三角形平均面积, S_i 为第 i 个三角形面积, D_i 为订正前第 i 个三角形散度, D_i' 为订正后第 i 个三角形散度。

当固定三角形面积(如 $S = 3.97 \times 10^4 \text{ km}^2$),并固定三端点 P ,选用三角形最大内角作为形状参数,发现最大内角增大,散度绝对值亦随之增大。当最大内角为 95° (即钝角)时,相对误差达32%;最大内角为 138° 时,相对误差79%;最大内角超过 152° 时,相对误差超过100%(图2)。可见,选择探空站点构成三角形时,应尽量避免出现钝角,三边应尽量相等。当出现钝角时,必须采用订正。

设 $D_i' = \mu D_i$, μ 为形状参数,可看成是正三角形的内角度数(60°)与第 i 个三角形的最大内角度数比值的函数,对 μ 亦作了模

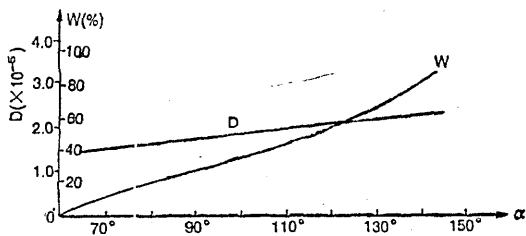


图2 散度绝对值D、相对误差W
与三角形最大内角曲线

拟, 结果得到较为理想的经验公式

$$\mu = (60/\alpha)^{\frac{1}{3}} \quad (6)$$

α 为最大内角, 此时散度与形状相关性最小。

综合(5)、(6)式, 散度的面积形状订正为

$$D_i' = (S_i/\bar{S})^{\frac{1}{2}} (60/\alpha)^{\frac{1}{3}} D_i \quad (7)$$

(二) 地图投影系数订正

地图投影放大系数与纬度 φ 有关:

$$m(\varphi) = \frac{d \cdot B \cdot A}{1 - \sin \varphi / 2} \cdot \frac{1}{1 + \sin \varphi / 2} \quad (8)$$

$$R(1 - \sin \varphi) \quad (1 + \sin \varphi)$$

式中 $m(\varphi)$ 为纬度 φ 处地图投影放大系数; d 为网格距, 取 300km^2 ; R 为地球半径, 取 6371km ; $B = 0.71556$; $A = 38.07860$ 。

对于某三角形而言, 地图投影放大系数可用 $m(\bar{\varphi})$ 代替, $\bar{\varphi}$ 为三端点纬度的算术平均值。

于是, 散度的地图投影订正:

$$D_i'' = m(\bar{\varphi}_i) D_i' \quad (9)$$

选取全国范围95个探空站点构成148个三角形, 在计算机上对各探空点及各三角形依次编号, 并将三角形有关的测站序号按逆时针方向依次写成数组。经计算, 得到148个三角形联网有关的面积形状订正系数、地图放大系数及综合订正系数(三角形分布图及订正系数表略)。这148个三角形的平均面积 4.54万km^2 , 离差 1.65万km^2 ; 面积形

状订正系数的平均值为0.89, 标准差为0.16; 地图投影订正系数平均值为0.978; 综合订正系数平均值0.872, 标准差0.18, 最大订正系数1.38, 最小0.57。可见, 这种订正量级并不小于物理量本身, 在散度计算中不容忽视; 另外这种订正总体上是使散度数值减小。

顺便指出, 风的计算由球面风转换成平面风是不可省略的, 它对散度计算的影响也很大。计算公式见文献〔3〕。

四、实例计算

采用上述散度订正方案并选用矢量代数法的计算方法, 计算了1983年我国大陆上空的水汽输送通量散度场, 包括月、季整层及分层的总输送通量散度、平均输送通量散度及涡动输送通量散度, 计算使用了逐日08时及20时95个探空点资料。所有计算结果表明, 这种订正新方案是可行的, 与实况较为符合。

以1983年7月为例。图3是7月850hPa总输送通量散度场, 辐合区在长江地区, 该月大于 200mm 降水区与辐合区较为符合, 降水中心与辐合中心接近; 27°N 以南为辐散区,

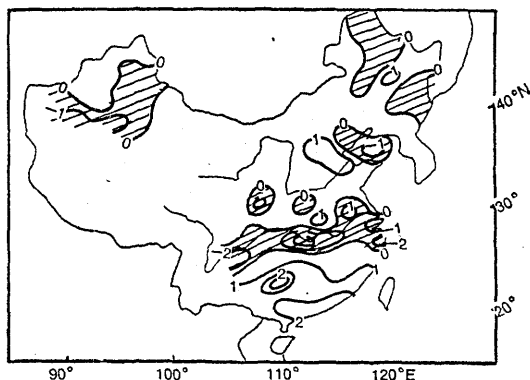


图3 1983年7月850hPa总输送通量散度场
(单位: $10^{-7}\text{g}/\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{hPa}$, 斜线区为辐合区)

这里正值受西太平洋副高控制, 主要受下沉气流影响。

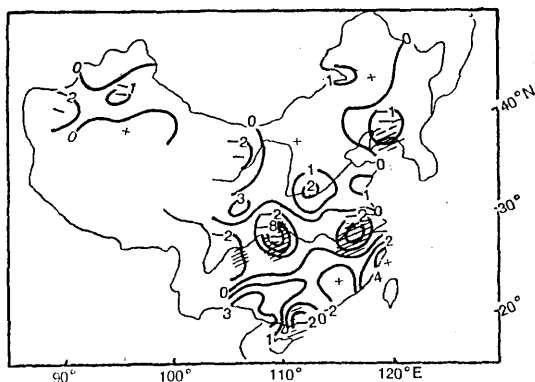


图4 1983年7月1—15日850hPa平均输送通量散度场 (斜线区为降水中心)

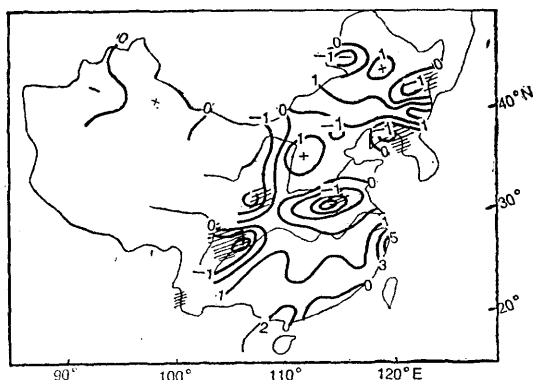


图5 1983年7月16—31日850hPa平均输送通量散度场 (斜线区为降水中心)

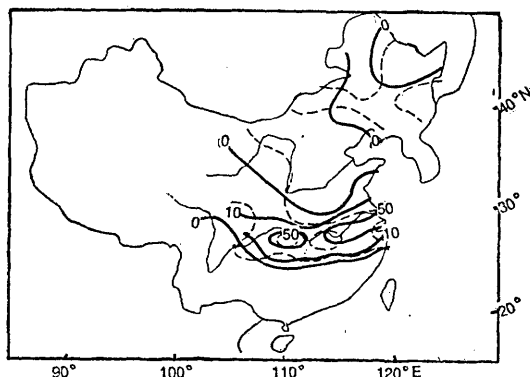


图6 1983年7月5日850hPa总输送通量散度场辐合区(虚线)与降水量(实线)图

图4、5分别是7月1—15日及16—31日850hPa平均输送通量散度场,正是该年出梅前后各15天的形势,辐合中心与降水中心几乎重叠。图6取自一次暴雨过程。

从垂直分布看,本方案计算结果也是令人满意的。500、400hPa层散度的辐散区与低层辐合区相对应,由低层辐合上升的水汽从高层辐散排出。高层辐散区与地面降水区对应关系亦很好,但辐散中心与雨量中心并非一一对应。此外,计算中还发现低层(850hPa)总输送通量散度场、700hPa平均输送通量散度场与降水的对应关系较好;从时间上看,一天或一个月以上时间尺度以总输送通量散度计算效果较好;时间尺度取半个月时,平均输送通量散度计算效果较好;跟踪一次天气过程计算通量散度效果最佳,而整层通量散度计算不及850、700、500hPa分层计算理想。

五、结 语

1. 计算散度的各种三点法实质上是相一致的,量值上所差甚微。
2. 用三点法计算散度须对面积、形状进行订正,这种订正较为可观,不容忽视。
3. 面积形状订正系数宜采用:

$$K_i = (S_i/\bar{S})^{\frac{1}{2}} (60/\alpha_i)^{\frac{1}{3}}$$
4. 以上订正在用三点法计算其它物理量时可供参考。

参 考 文 献

- (1) 丁一汇, 诊断分析方法, 中国科学院大气物理研究所印。
- (2) J. C. Bellamy, Objective Calculation of Divergence, Vertical Velocity and Vorticity, Bulletin of Amer. meteor. Soc., Vol.30, No. 2, 1949.
- (3) 廖洞贤, 一个直接用观测资料计算大范围散度、涡度和垂直速度的方案, 气象学报, 1980年第4期。
- (4) 彭金泉, 计算任意三角形平均涡度和散度的一种新方案, 气象, 1984年第11期。

- (5) 施永年, 动力气候学中客观计算散度场、涡度场的一种新方案, 气象学报, 1982年第4期。
- (6) 文宝安, 水平散度的几种计算方法, 气象, 1980年第5期。

- (7) 林宗鸿, 用三点法计算散度的参数问题, 南京气象学院学报, 1982年第2期。
- (8) 黄正中, 高等数学, 人民教育出版社, 1979。

Comparison among varieties of trilaterations applied to divergence calculation and relative correction scheme

Cui Yifeng

(Nanjing Institute of Hydrology and Water Resources)

Abstract

In this paper, varieties of trilaterations applied to divergence calculation are compared. The results of mathematical deductions show that all these methods are quite identical or like. And a new correction scheme is given.