

# 饱和湿绝热方程的精确数值计算

李任承

王国通

(河北气象学校)

(南皮县气象站)

## 提 要

本文根据大气热力学基本原理,探讨了各种不同情形下饱和湿绝热上升气块中温度变化的规律,提出了由饱和湿绝热变态方程进行精确数值计算的结果。

式中所用符号均为气象上的常用符号(下同)。

## 一、前言

饱和湿绝热过程是大气热力学中重要的热力过程。饱和湿绝热上升气块中温度变化的精确数值计算,关系到各种稳定度指数以及大气能量的计算,对于降水和各种不稳定性天气的能量分析具有重要意义。

最简单的饱和湿绝热过程,是可逆湿绝热过程和假(湿)绝热过程。其余的饱和湿绝热过程则是介于这两者之间的情形。

本文根据大气热力学基本原理,探讨了各种不同情形下饱和湿绝热上升气块中温度变化的规律,并且提出了直接根据饱和湿绝热变态方程,在计算机上进行精确数值计算的方法(其精确度可以根据研究的需要任意确定),得出了一些有益的结果。我们所进行的计算,主要采用的是“二分法”求近似根,便于在计算机上实现<sup>[1]</sup>。本文所确定的精确度温度误差不超过0.01°C。

## 二、可逆湿绝热变态方程及其精确数值计算结果

假定可逆湿绝热上升气块中干空气的质量为1kg,水汽质量为 $w_s$ kg,液态水的质量为 $(w_c - w_s)$ kg。若不计液态水的微小体积,根据热力学第一定律,该气块的变态微分方程为:

$$\begin{aligned} & -L_v dw_c - (w_0 - w_s) c_w dT \\ & = c_{pd} dT - R_d T d \ln(P - E) \\ & + w_s (c_{pv} dT - R_v T d \ln E) \end{aligned} \quad (1)$$

引入克劳修斯-克拉珀龙方程

$$\frac{dE}{E} = \frac{L_v dT}{R_v T^2}$$

和基尔霍夫定律

$$dL_v = (c_{pv} - c_w) dT$$

由(1)式可得:

$$(c_{pd} + w_0 c_w) d \ln T - R_d d \ln(P - E)$$

$$+ d \left( \frac{L_v w_s}{T} \right) = 0 \quad (2)$$

对(2)式由凝结高度 $P_k$ 到气块上升达到的高度 $P$ 进行积分,便得到可逆湿绝热变态方程:

$$\begin{aligned} & (c_{pd} + w_0 c_w) \ln \frac{T}{T_k} - R_d \ln \frac{P - E}{P_k - E_k} \\ & + \frac{L_v w_s}{T} - \frac{L_{vk} w_{sk}}{T_k} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中带下标 $k$ 的物理量表示凝结高度处的物理量。(3)式亦可化为:

$$\theta_{se}^* = \left( \frac{T_k}{T} \right)^{w_0 c_w / c_{pd}} \theta_{sek} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \theta_{se}^* & \equiv T \left( \frac{1000}{P - E} \right)^{R_d / c_{pd}} \exp \left( \frac{L_v w_s}{c_{pd} T} \right); \\ \theta_{sek} & \equiv T_k \left( \frac{1000}{P_k - E_k} \right)^{R_d / c_{pd}} \exp \left( \frac{L_{vk} w_{sk}}{c_{pd} T_k} \right) \end{aligned}$$

由(4)式可以看出:在可逆湿绝热过程中,气块的 $\theta_{se}^*$ 是随上升高度的增加而增大的。

在进行计算时,上述有关物理量取值如下(2)(3),

$$L_v = L_0 + (c_{pv} - c_w)(T - T_0)$$

$$L_0 = 2500800 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$c_{pv} = 1846.04 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$c_w = 4218 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$T_0 = 273.15 \text{ K}$$

$$c_{pd} = 1004.675 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$R_d = 287.054 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$R_v = 461.515 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$E = E_0 \cdot 10^{7.45(T-T_0)/(235+T-T_0)}$$

$$E_0 = 6.1078 \text{ hPa}$$

表1是假定凝结高度为1000hPa时,直接由(4)式算得的饱和湿空气块在可逆湿绝热上升过程中温度变化的查算简表。计算时采用“二分法”求近似根,精确到0.01°C。

表1 可逆湿绝热上升气块的温度查算简表 (N=1)

T (°C) \ P (hPa) \ T <sub>k</sub>	-10	0	10	20	30	40
1000	-10	0	10	20	30	40
900	-16.31	-5.58	5.28	16.06	26.63	37
800	-23.6	-12.13	-0.24	11.53	22.84	33.67
700	-32.05	-19.93	-6.86	6.22	18.51	29.93
600	-41.84	-29.33	-15.01	-0.21	13.43	25.63
500	-53.24	-40.7	-25.34	-8.36	7.25	20.58
400	-66.62	-54.46	-38.68	-19.31	-0.67	14.39
300	-82.78	-71.34	-55.99	-35	-11.77	6.33
200	-103.46	-93.07	-78.9	-58.32	-30	-5.44

### 三、理想的假(湿)绝热变态方程及其精确数值计算结果

在不考虑液态水时,(2)式中的 $w_0$ 换成 $w_s$ ,便可得到假(湿)绝热上升气块的变态微分方程:

$$(c_{pd} + w_s c_w) d \ln T - R_d \ln(P - E) + d\left(\frac{L_v w_s}{T}\right) = 0 \quad (5)$$

对(5)式由凝结高度 $P_k$ 到气块上升达到的高度 $P$ 进行积分,注意到 $w_s$ 为气压 $P$ 和温度 $T$ 的函数<sup>[4]</sup>,则有:

$$(c_{pd} + \bar{w}_s c_w) \ln \frac{T}{T_k} + \frac{L_v \bar{w}_s}{T} - R_d \ln \frac{P - E}{P_k - E_k} - \frac{L_{vk} \bar{w}_{sk}}{T_k} = 0 \quad (6)$$

式中 $\bar{w}_s$ 为 $P_k$ 到 $P$ 之间的平均饱和混合比,并且有:

$$\bar{w}_s = \frac{\int_{T_k}^T w_s d \ln T}{\ln T - \ln T_k} \quad (7)$$

这样,(6)式又可以写做:

$$\theta_{se} = \left(\frac{T_k}{T}\right)^{w_s c_w / c_{pd}} \theta_{sek} \quad (8)$$

其中 $\theta_{se} = T \left(\frac{1000}{P - E}\right)^{R_d / c_{pd}} \exp\left(\frac{w_s L_v}{c_{pd} T}\right)$

由(8)式可以看出:在假(湿)绝热过程中,气块的热力学函数 $\theta_{se}$ 也是随着上升高度的增加而增大的。此外,由(7)式可以看出:

$$w_s < \bar{w}_s < w_{sk} = w_0$$

令 $\bar{w}_s = w_s + N(w_0 - w_s)$ ,则有:

$$N = \frac{\bar{w}_s - w_s}{w_0 - w_s} \quad (9)$$

N的取值范围是：0 < N < 1。如果取极限值，当 N = 1 时，则  $\bar{w}_s = w_0$ ，(8) 式便与(4)式的意义相同；当 N = 0 时， $\bar{w}_s = w_s$ ，于是(8)式便成为：

$$\theta_{se} = \left( \frac{T_k}{T} \right)^{w_s C_w / C_{pd}} \theta_{sek} \quad (10)$$

我们把(10)式称为理想的假(湿)绝热过

程的变态方程。由(10)式可以看出：在理想的假(湿)绝热过程中，上升气块的热力学函数  $\theta_{se}$  先是随高度的增加而增大，到某一高度后又随高度的增加而减小，并逐渐趋近于  $\theta_{sek}$ 。

表 2 是假定凝结高度为 1000hPa 时，由(10)式算得的饱和湿空气块在理想的假(湿)绝热上升过程中温度变化的查算简表(精确到 0.01°C)。

表 2 理想的假(湿)绝热上升气块的温度查算简表 (N = 0)

T (°C) \ P (hPa)	T <sub>k</sub>	-10	0	10	20	30	40
1000		-10	0	10	20	30	40
900		-16.32	-5.59	5.26	16.04	26.62	37
800		-23.65	-12.21	-0.31	11.48	22.81	33.65
700		-32.16	-20.12	-7.04	6.08	18.42	29.87
600		-42.03	-29.68	-15.42	-0.54	13.22	25.51
500		-53.52	-41.24	-26.12	-9.06	6.82	20.33
400		-66.99	-55.21	-39.95	-20.71	-1.54	13.91
300		-83.24	-72.3	-57.82	-37.6	-13.65	5.44
200		-104.01	-94.26	-81.27	-62.39	-34.51	-7.47

表 3 几种不同 N 值时饱和湿绝热上升气块的温度随高度的变化 (T<sub>k</sub> = 31°C)

T (°C) \ P (hPa)	N	0	0.3	0.5	0.7	1
1000		31	31	31	31	31
900		27.67	27.67	27.67	27.67	27.68
800		23.91	23.92	23.93	23.94	23.95
700		19.6	19.63	19.64	19.66	19.69
600		14.51	14.57	14.61	14.65	14.71
500		8.27	8.4	8.48	8.56	8.68
400		0.18	0.43	0.6	0.76	1
300		-11.44	-10.88	-10.52	-10.17	-9.69
200		-31.4	-29.97	-29.1	-28.27	-27.1
100		-72.14	-69.17	-67.29	-65.48	-62.92

#### 四、一般情形下的饱和湿绝热变态方程及其精确数值计算结果

我们可以把一般的饱和湿绝热过程看作是介于可逆湿绝热过程和理想的假(湿)绝

热过程之间的情形。这时，N 值可取 0 和 1 之间的数值，其变态方程为：

$$\theta_{se} = \left( \frac{T_k}{T} \right)^{[w_s + N(w_0 - w_s)] C_w / C_{pd}} \theta_{sek} \quad (11)$$

表4  $\theta_{se} \equiv \theta_{sek}$  时上升气块的温度变化 ( $T_k = 31^\circ\text{C}$ )

$T$ ( $^\circ\text{C}$ )	$T_k$	31
$P$ (hPa)		
1000		31
900		27.59
800		23.76
700		19.36
600		14.19
500		7.89
400		-0.26
300		-11.87
200		-31.64
100		-72.14

表3是N取不同数值时, 凝结高度为1000hPa、温度为 $31^\circ\text{C}$ 的一个饱和湿空气块在饱和湿绝热上升时温度变化的情形(精确到 $0.01^\circ\text{C}$ )。

表4是 $\theta_{se} \equiv \theta_{sek}$ 时, 凝结高度为1000hPa、温度为 $31^\circ\text{C}$ 的一个饱和湿空气块绝热上升时温度变化的简表(精确到 $0.01^\circ\text{C}$ )。

图1是上述气块在几种不同情形下饱和湿绝热上升时的温度变化曲线: I,  $\theta_{se} \equiv \theta_{sek}$ ; II,  $N=0$ ; III,  $N=0.5$ ; IV,  $N=$

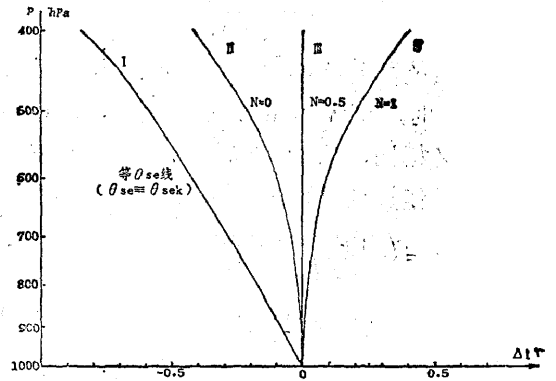


图1 几种不同情形下的饱和湿绝热上升气块温度偏差(当 $N=0.5$ 时,  $\Delta t=0$ )示意图

I。

当 $N=0.5$ 时, (11) 式便成为:

$$\theta_{se} = \left( \frac{T_k}{T} \right)^{\frac{1}{2}(W_0 + W_1)C_w/C_{pd}} \theta_{sek} \quad (12)$$

(12) 式可以代表一般情形下的饱和湿绝热变态方程。表5是假定凝结高度为1000hPa时, 由(12)式算得的一般情形下饱和湿绝热过程中不同上升气块温度变化的查算简表(误差不超过 $0.01^\circ\text{C}$ )。

表5 一般情形下饱和湿绝热上升气块的温度查算简表 ( $N=0.5$ )

$T$ ( $^\circ\text{C}$ )	$T_k$	-10	0	10	20	30	40
$P$ (hPa)							
1000		-10	0	10	20	30	40
900		-16.31	-5.59	5.27	16.05	26.63	37
800		-23.62	-12.17	-0.28	11.5	22.83	33.66
700		-32.09	-20.02	-6.94	6.15	18.46	29.9
600		-41.93	-29.5	-15.21	-0.37	13.33	25.57
500		-53.38	-40.97	-25.72	-8.7	7.04	20.46
400		-66.81	-54.83	-39.3	-19.98	-1.09	14.17
300		-83.01	-71.81	-56.89	-36.25	-12.66	5.91
200		-103.74	-93.66	-80.08	-60.3	-32.1	-6.38

图2是上述气块在温度对数压力图解(中央气象局气图5204)上几种不同情形下饱和湿绝热上升时的温度变化曲线: I,

$\theta_{se} \equiv \theta_{sek}$ ; II,  $N=0$ ; III,  $N=0.5$ ; IV,  $N=1$ 。

由图2可以看出: 当 $N=0.5$ 时, 饱和

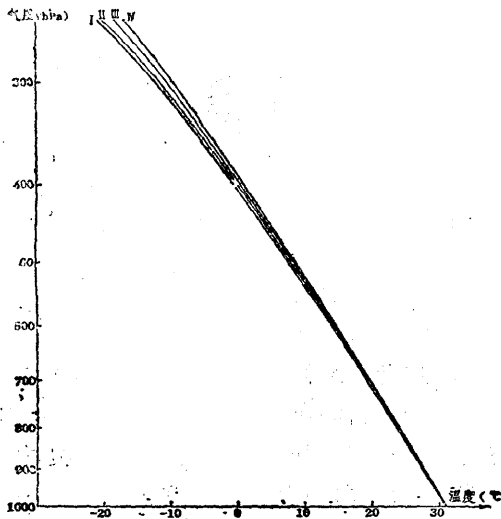


图2 几种不同情形下的饱和湿绝热上升曲线  
 (I:  $\theta_{s0} = \theta_{sk}$ , II:  $N=0$ , III:  $N=0.5$ ,  
 IV:  $N=1$ ,  $T_k = 31^\circ\text{C}$ )

湿绝热上升气块的温度变化曲线与温度对数压力图解上的湿绝热线(绿色断线)基本一致。由此可见,温度对数压力图解上的湿绝热线与本文中一般情形下的饱和湿绝热线相吻合,(12)式可做为一般情形下饱和湿绝热过程的变态方程。

### 参考文献

- 〔1〕《数学手册》编写组,数学手册,103—104,人民教育出版社,1979。
- 〔2〕中央气象局气科院天气气候所编,天气分析预报用表,1,1979。
- 〔3〕沈春康,大气热力学,30,227,228,气象出版社,1983。
- 〔4〕J. V. Iribarne and W. L. Godson, 大气热力学,65,105,中国人民解放军空军气象学院译,1978。

## The accurate numerical computation of saturation adiabatic equation

Li Rencheng

(Hebei Meteorological School)

Wang Guotong

(Nanpi Meteorological Station, Hebei Province)

### Abstract

Based on the fundamental theory of atmospheric thermodynamics, the regularity of thermal variations among the upward saturation-adiabatic air parcels has been sought out under various circumstances. The relative equation and its numerical results are born.