

柯氏力引起的流体“挤压”现象

金明德
(南京气象学院)

提 要

本文从虚位移原理出发, 计算了流体质点组成的质点系。在柯氏力作用下, 流体的形态将因“挤压”现象而发生改变。对气体而言, 由于“挤压”, 将会导致气体密度分布的不均匀, 造成沿气体流动方向两侧产生压力差。这种“挤压”现象在精确求解气团运动压力分布时, 应予考虑。

地球上的任何物体, 当它相对于地球运动时, 将会向右偏转(对北半球而言)。如果把运动物体作为一个运动着的质点进行受力分析, 可知质点上除了受到牛顿力的作用以外, 还有柯氏力这样的惯性力的作用, 在北半球, 沿质点的运动方向看去, 柯氏力始终是指向右侧的。现在, 我们要来讨论由 n 个流体质点所组成的质点系的情况, 如河流中的流水, 对于每个流体质点而言, 它同样受到柯氏力的作用, 致使河水对右岸不断冲刷, 造成河岸倒塌。这是众所周知的事实。这里, 我们要进一步讨论, 对于流体质点所组成的系统, 不能将它作为刚体, 更不能作为一个质点来处理, 而是由 n 个质点所组成的质点系。为此, 必然要考虑对整个流体系统而言, 它的形态是否会发生改变? 这个问题过去未被人们注意, 笔者想从分析力学中的基本原理出发给予讨论。

首先, 我们来讨论具有 n 个质点组成的系统, 如果该系统处于静平衡, 则对于系统内的每一个质点而言, 必有

$$\vec{F}_i + \vec{N}_i = 0 \quad (1)$$

其中 \vec{F}_i 和 \vec{N}_i 分别表示作用于第 i 个质点上的主动力和约束力。因此, 所有的力与约束相一致的任意虚位移中所作的虚功应为零, 即

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{N}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2)$$

$\delta \vec{r}_i$ 是与约束相一致的可能虚位移, 如果我们考虑理想约束的质点系, 即满足

$$\sum_{i=1}^n \vec{N}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3)$$

则(2)式可以化成

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (4)$$

上式表示: 对于一个受有理想约束的质点系统, 作用在系统上所有主动力的虚功之和等于零, 称为虚位移原理。

虚位移原理是用来讨论质点系是否处于静平衡的充分必要条件, 这里所指的静平衡是相对于惯性参照系而言。这个原理同样可以推广到非惯性参照系, 此时, 就具有如下的形式

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (5)$$

式中 $\ddot{\vec{r}}_i$ 是质点相对于惯性参照系的加速度, 称为绝对加速度, $(-m_i \ddot{\vec{r}}_i)$ 称为惯性力。上式表明: 由 n 个质点组成的理想约束的力学系统, 在任一瞬时, 作用于系统上的所有主动力和惯性力在任意位移上的虚功之和等于零。这样, 就将讨论的问题, 由静平衡系统推广到动力学系统, 或者说, 将一个动力学问题转变成静力学问题来处理。

式(5)中所给出的加速度是质点相对于惯性参照系的加速度, 对加速度的具体表达未加任何限制, 所以质点既可作直线加速运动, 也可以作转动运动。如果我们讨

论地球这样一个以 $\vec{\Omega}$ 作定轴转动的非惯性系，则质点的加速度应为

$$\vec{r} = \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (6)$$

式中 $\frac{d_a \vec{V}_a}{dt}$ 为绝对加速度， $\frac{d\vec{V}}{dt}$ 为相对加速度， $2\vec{\Omega} \times \vec{V}$ 为柯氏加速度， $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ 为牵连加速度， \vec{V}_a 为绝对速度， \vec{V} 为相对速度， $\vec{\Omega}$ 为地球自转角速度矢量， \vec{r} 为地心到质点的位置矢量，对处在地球上的质点而言，该位置矢量的大小即为地球半径R。

将式(6)代入式(5)，并取 $\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$ ，则得：

$$\sum_{i=1}^n [\vec{F}_i - m_i \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}_i) - 2m_i \vec{\Omega} \times \vec{V}_i] \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (7)$$

式中 \vec{F}_i 表示地球对质点的引力， $-m_i \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}_i)$ 表示质点所受的惯性离心力， $-2m_i \vec{\Omega} \times \vec{V}_i$ 表示质点所受的柯氏力。由于地球的自转，静止于地面上物体的重力为 $m_i g$ ，实际上是地球对该物体的引力与其惯性离心力的矢量和，即：

$$m_i \vec{g} = \vec{F}_i - m_i \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}_i) \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)得

$$\sum_{i=1}^n (m_i \vec{g} - 2m_i \vec{\Omega} \times \vec{V}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (9)$$

现在，我们在北纬 φ 处p点建立如图所示的坐标系，x轴沿经圈指向东，y轴沿纬圈指向北，z轴指向天顶。若讨论质量为m的某一流体质点，则应满足方程：

$$(m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{V}) \cdot \delta \vec{r} = 0$$

或写成：

$$(\vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}) \cdot \delta \vec{r} = 0 \quad (10)$$

由于

$$\vec{g} = -g\vec{k}$$

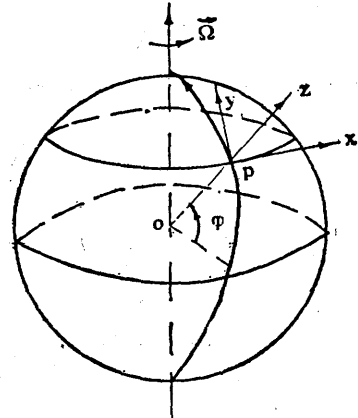
$$\vec{\Omega} = \Omega \cos \varphi \vec{j} + \Omega \sin \varphi \vec{k}$$

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$\delta \vec{r} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为三个坐标轴的单位矢量， u, v, w 为相对速度 \vec{V} 在三个坐标轴上的分量，所以式(10)可以写成：

$$2\Omega(w \cos \varphi - v \sin \varphi) \delta x + 2u\Omega \sin \varphi \delta y + (g - 2u\Omega \cos \varphi) \delta z = 0 \quad (11)$$



附图 北纬 φ 处p点的坐标系

式(11)正是我们所要采用的计算公式，使用该式可以计算流体形态的变化，下面以南京长江大桥下面的流水为例进行说明。假设已知条件为：南京所处纬度 $\varphi = 32^\circ N$ ，长江江面宽5000m，流水方向是自西向东，并设以恒定速率 $u = 10 m \cdot s^{-1}$ 流动，且 $v = 0, w = 0$ 。

由于地球的自转角速度很小， $\Omega \approx 7.26 \times 10^{-5} rad \cdot s^{-1}$ ，若忽略 Ω 项，即不考虑柯氏力的影响，则由式(11)可以直接得到：

$$\Delta z = 0 \quad (12)$$

这正是人们所习惯的水平面，流体质点仅受到重力作用，河面处处与重力相垂直，即自由液面。

若考虑柯氏力的影响，且取 $u \neq 0$ ，而 $v = 0, w = 0$ ，则式(11)变成为：

$$2u\Omega \sin \varphi \delta y + (g - 2u\Omega \cos \varphi) \delta z = 0 \quad (13)$$

或写成

$$f u \delta y + (g - f_1 u) \delta z = 0 \quad (14)$$

式中 $f = 2\Omega \sin\varphi$, $f_1 = 2\Omega \cos\varphi$, f_u 表示 y 方向的柯氏力, f_{1u} 表示 z 方向的柯氏力。

式 (14) 为一平行于 x 轴的平面方程, 对于某一确定的流速而言, 该平面与自由液面间有一夹角 α 。在式 (14) 中, δy 和 δz 不互相独立, 而满足约束方程:

$$\delta z = -\operatorname{tg}\alpha \cdot \delta y \quad (15)$$

代入式 (14) 得

$$[f_u - (g - f_{1u}) \operatorname{tg}\alpha] \delta y = 0 \quad (16)$$

要使上式恒等于零, 则 δy 前的系数应恒等于零, 故而得到

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f_u}{g - f_{1u}} \quad (17)$$

将所设南京长江大桥下面流水已知条件代入, 可得: $\Delta z = -\operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta y$

$$= \frac{2 \times 10 \times 7.29 \times 10^{-5} \times \sin 32^\circ}{9.8 - 2 \times 10 \times 7.29 \times 10^{-5} \times \cos 32^\circ} \times 5000 \approx 0.39 \text{ (m)}$$

可见在柯氏力的作用下, 江面虽然呈现为平面, 但该平面并不与重力垂直, 在江面两侧有 0.39m 的高度差, 即江面呈倾斜状态。

如果河水流动, 不仅 $u \neq 0$, 且 $v \neq 0$, 则由式 (11) 得到:

$$-2v\Omega \sin\varphi \delta x + 2u\Omega \sin\varphi \delta y + (g - 2u\Omega \cos\varphi) \delta z = 0 \quad (18)$$

上式仍为平面方程, 但水面呈倾斜状态, δx 、 δy 、 δz 前面的系数为该平面法线方向的。

以上我们仅是从理想约束的情况, 讨论了河流中液体质点以整体恒定的流速运动时, 每个流体质点受到柯氏力的作用, 最终会使液面出现倾斜现象。计算结果可能有一定的误差, 但是这种处理方法与结论应该是可取的, 它揭示象流体这样的质点系, 由于受到柯氏力的作用会造成流体系统形态的变化。河面倾斜的物理图象, 其实质是流体质点在柯氏力的作用下, 有一种向右“挤压”或“堆积”的结果, 由于液体不容易被压缩, 这种向右的“挤压”现象就导致了河面自右岸向左岸(沿流速方向看)的倾斜状态。在大气运动的过程中, 以上的处理方法完全适用, 由于气体可以压缩, 当被压缩后, 密度就要改变, 相应的压力也随之增大。所以, 气体向右的“挤压”现象, 就导致了沿气流方向看去, 右边将会产生增压现象, 而左边则将产生减压。因此, 在精确求解压力分布时, 应该适当考虑流体的这种“挤压”现象。

“Crowding” in the fluid due to the Coriolis force

Jin Mingde

(Nanjing Institute of Meteorology)

Abstract

In this paper, based on the principle of virtual displacement, the changes in form of the particle system composing the fluid are calculated that leads to the “crowding” under the action of the Coriolis force. For a gas, the “crowding” will result in an inhomogeneous distribution of density, thus causing a pressure difference on both sides in the direction of its motion. Such “crowding” can serve as a reference in finding the accurate solution of the pressure distribution of air masses.