大气层结不稳定能量的简便计算方法

李 任 承

（河北气象学校）

提 要

本文运用大气能量学、大气热力学和大气动力学基本原理，提出了适用于载水气块在可逆湿绝热上升过程中，和非载水气块在假绝热上升过程中，大气层结不稳定能量的两个简便计算公式。

一、引言

对流运动发展的强弱主要决定于大气层结不稳定能量的多少。

计算大气层结不稳定能量的原始公式为[1]：

$$E_{p_0}^{p'} = -R_d\int_{p_0}^{p}(T_v-\bar{T}_v)\,d\ln p \quad \cdots\cdots（1）$$

式中 T_v 为环境空气的虚温。

但是，根据（1）式进行计算存在如下的问题：（1）式仅仅适用于非载水气块——假绝热上升过程，带有一定的局限性。对于载水气块——可逆湿绝热上升过程，如果用（1）式进行计算，由于忽略了液态水的作用，因而算得的不稳定能量值过分夸大，出现了虚假现象。而实际观察对流云的发展过程可以发现：在淡积云和浓积云阶段，上升气块的热力过程接近于可逆湿绝热过程，液态水基本上不脱离云体，可以把这个阶段的上升气块当做载水气块来对待；只有到浓积云阶段的后期，当对流云发展为秃积雨云，并向着鬃积雨云发展时，以及在鬃积雨云阶段，由于大水滴的形成并大量脱离上升气块，上升气块的热力过程才接近于假绝热过程，可以把这个阶段的上升气块当做非载水气块来对待。此外，对（1）式进行积分需要完整的探空资料，十分困难并且不能进行精确积分。

本文运用大气能量学、大气热力学和大气动力学基本原理，提出了适用于载水气块在可逆湿绝热上升过程中和非载水气块在假绝热上升过程中不稳定能量的两个简便计算公式。

在周围大气处于静力平衡的情况下，假定系统的热力过程是准静态过程，并且满足准静力条件[1]；不计摩擦力的影响，也不考虑卷挟作用。一个气块由气压为 p_0 的高度绝热上升到气压为 p 的高度时，其垂直运动比动能的改变量，叫做 p_0—p 气层间的大气层结不稳定能量，记做：

$$E_{p_0}^{p} \equiv \frac{1}{2}W_p^2-\frac{1}{2}W_0^2$$

式中 W_0 和 W_p 分别是上升气块在 p_0 高度时和 p 高度时的垂直速度。

若把干空气的比焓记做 h_d，则有：$h_d=c_{pd}T+C_0$；水汽的比焓记做 h_v，则有：$h_v=c_{pv}T+C_1$；液态水的比焓记做 h_w，则有：$h_w=C_wT+C_2$，式中 C_0、C_1、C_2 均为常量；当温度相同时，有 $h_v=h_w+L$，其中 L 为水的汽化潜热，它是温度 T 的函数。

如果空气块在运动过程中与外界没有质量和热量的交换，并且又是在无摩擦的、外界气压场保持定常的情况下进行的，那末，它的总能量是守恒的。

对于质量为 $1+w_0$ 的未饱和湿空气块，设其中干空气的质量为 1 个单位，水汽的质量为 w_0 个单位，它的能量守恒方程为：

$$h_d+w_0h_v+(1+w_0)(\frac{1}{2}V^2+g_0H)=Const \quad \cdots\cdots（2）$$

式中 V 为空气块的全速度，H 为位势高度，

$$g_0=9.8J\cdot kg^{-1}\cdot gpm^{-1}$$

对于质量为 $1+w_0$ 的饱和湿空气块，设

其中干空气的质量为1个单位，水汽的质量为 w_s 个单位，液态水的质量为 w_0-w_s 个单位，则其能量守恒方程式为：

$$h_d+w_sh_v+(w_0-w_s)h_w+(1+w_0)(\frac{1}{2}V^2+g_0H)=Const \quad\cdots\cdots(3)$$

二、载水气块在可逆湿绝热上升过程中不稳定能量的计算公式

1. 能量学推证

对于质量为 $1+w_0$ 的未饱和湿空气块，设其水平运动速度为零，在由起始高度 p_0 处绝热上升到凝结高度 p_k 处时，根据(2)式，有：

$$h_{d0}+w_0h_{v0}+(1+w_0)(\frac{1}{2}W_0^2+g_0H_0)$$

$$=h_{dk}+w_0h_{vk}+(1+w_0)(\frac{1}{2}W_k^2+g_0H_k) \quad\cdots\cdots(4)$$

当气块上升到 p_k 高度以后，如果是按可逆湿绝热过程继续上升的，当到达气压为p的高度时，根据（3）式，有：

$$h_{dk}+w_0h_{vk}+(1+w_0)(\frac{1}{2}W_k^2+g_0H_k)$$

$$=h_{dp}+w_{sp}h_{vp}+(w_0+w_{sp})h_{wp}$$

$$+(1+w_0)(\frac{1}{2}W_p^2+g_0H_p) \quad\cdots\cdots(5)$$

注意到 $h_{d0}-h_{dp}=c_{pd}(T_0-T_p)$；

$$w_0h_{v0}-w_{sp}h_{vp}=w_0c_{pv}(T_0-T_p)$$

$$+(w_0-w_{sp})(h_{vp}-h_{wp})+(w_0-w_{sp})h_{wp},$$

将（4）式加上（5）式整理得：

$$(1+w_0)E_{p_0}^{p}=c_{pd}(T_0-T_p)+L_p(w_0-w_{sp})$$

$$-(1+w_0)g_0H_0^p+w_0c_{pv}(T_0-T_p)\cdots(6)$$

其中 $H_0^p=H_p-H_0$，

$$L_p=L_0-(C_w-c_{pv})(T_p-273)$$

2. 热力学和动力学推证

质量为 $1+w_0$ 的载水气块在可逆湿绝热过程中，其热力学第一定律方程为：

$$c_{pd}dT-R_dTd\ln(p-E_s)+d(w_sh_v)$$

$$-w_sR_vTd\ln E_s+d[(w_0-w_s)h_w]=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

式中 E_s 为饱和水汽压；其垂直运动方程为：

$$(1+w_0)\frac{dW}{dt}=(1+w_s)\frac{T_v-\bar{T}_v}{\bar{T}_v}g$$

$$-(w_0-w_s)g$$

把静力学基本方程 $d\bar{p}=-\bar{\rho}gdZ$ 代入上式得：

$$(1+w_0)d(\frac{1}{2}W^2)=-(1+w_s)R_dT_vd\ln\bar{p}$$

$$-(1+w_0)g_0dH \quad\cdots\cdots(8)$$

在准静力条件下和准静态过程中，可以证明：

$$(1+w_s)R_dT_vd\ln\bar{p}$$

$$=R_dTd\ln(p-E_s)$$

$$+w_sR_vTd\ln E_s \cdots\cdots(9)$$

由（7）、（8）、（9）式得：

$$(1+w_0)d(\frac{1}{2}W^2)=-c_{pd}dT-d(w_sh_v)$$

$$-(1+w_0)g_0dH-d[(w_0-w_s)h_w]$$

积分上式得：

$$(1+w_0)E_{pk}^{p}=c_{pd}(T_k-T_p)+w_0h_{vk}$$

$$-w_{sp}h_{vp}-(w_0-w_{sp})h_{wp}-(1+w_0)g_0H_k^p \quad\cdots\cdots(10)$$

将（10）式加上（4）式，整理得：

$$(1+w_0)E_{p0}^{p}=c_{pd}(T_0-T_p)+L_p(w_0-w_{sp})$$

$$-(1+w_0)g_0H_0^p+w_0c_{pv}(T_0-T_p) \quad\cdots\cdots(11)$$

其结果与（6）式完全相同。

为了与非载水气块的假绝热上升过程相区别，我们把载水气块在可逆湿绝热过程中的状态参量其右上角加上“*”号，于是将（11）式整理后可以写做：

$$E_p^{*p}=c_{pd}(T_0-T_p^*)+L_q^*(q_0-q_{sp}^*)-g_0H_0^p+$$

$$+q_0(c_{pv}-c_{pd})(T_0-T_p^*) \cdots\cdots(12)$$

其中 $q_{sp}^*=\frac{w_{sp}^*}{1+w_0}\approx\frac{w_{sp}^*}{1+w_{sp}^*}$。(12) 式就是适用于载水气块在可逆湿绝热上升过程中不稳定能量的计算公式。(12) 式还可以进一步改写为：

$$E_{p0}^{*p}=c_p(T_0-T_p^*)+L_p^*(q_0-q_{sp}^*)-g_0H_0^p \quad\cdots\cdots(12-1)$$

其中 $c_p=c_{pd}[1+(\frac{c_{pv}}{c_{pd}}-1)q_0]$，为起始时刻上升气块的定压比热。

三、非载水气块在假绝热上升过程中不稳定能量的计算公式

1. 能量学推证

质量为 $1+w_0$ 的未饱和湿空气块，在绝热上升到凝结高度 p_k 以后，如果是按假绝热过程（凝结出来的液态水立即全部脱离上升气块）继续上升的，那末，由于液态水的脱落，气块的总能量将不再守恒。当气块上升到气压为 p的高度时，设其失去的能量为 Δx，并设其水平运动速度为零，根据（3）式，则有：

$$h_{dk}+w_0h_{vk}+(1+w_0)\left(\frac{1}{2}W_k^2+g_0H_k\right)$$

$$=h_{dp}+w_{sp}h_{vp}+(1+w_{sp})\left(\frac{1}{2}W_p^2-g_0H_p\right)$$

$$+\Delta x \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

假定 $W_0=0$，将（13）式加上（4）式，整理得：

$$(1+w_{sp})E_{p0}^p=c_{pd}(T_0-T_p)+L_p(w_0-w_{sp})$$
$$+w_0c_{pv}(T_0-T_p)+C_w(w_0-w_{sp})T_p$$
$$+(w_0-w_{sp})g_0H_0-(1+w_{sp})g_0H_0^p-\Delta x$$

即：
$$E_{P0}^P=c_{pd}(T_0-T_p)+L_p\left(\frac{w_0}{1+w_{sp}}-q_{sp}\right)$$

$$-g_0H_0^p+\frac{w_0}{1+w_{sp}}c_{pv}(T_0-T_p)+C_w\frac{w_0-w_{sp}}{1+w_{sp}}T_p$$

$$+\frac{w_0-w_{sp}}{1+w_{sp}}g_0H_0-q_{sp}c_{pd}(T_0-T_p)-\frac{\Delta x}{1+w_{sp}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

2. 热力学和动力学推证

饱和湿空气块在假绝热上升时，其热力学第一定律方程式为：

$$c_{pd}dT-R_dTd\ln(p-E_s)+d(w_sh_v)-$$
$$w_sR_vTd\ln E_s-h_wdw_s=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

其垂直运动方程为：

$$\frac{dW}{dt}=\frac{T_v-\bar{T}_v}{\bar{T}_v}g$$

即：
$$(1+w_s)d\left(\frac{1}{2}W^2\right)=-(1+w_s)\cdot$$

$$R_dT_vd\ln\bar{p}-(1+w_s)g_0dH\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

由（9）、（15）、（16）式得：

$$d\left(\frac{1}{2}W^2\right)=-\frac{1}{1+w_s}[c_{pd}dT+d(w_sh_v)-$$

$$-h_wdw_s]-g_0dH$$

即：
$$d\left(\frac{1}{2}W^2\right)=-\frac{1}{1+w_s}[c_{pd}dT+d(Lw_s)$$

$$+w_sdh_w]-g_0dH$$

积分上式得：

$$E_{pk}^p=\frac{1}{1+\bar{w}_s}[C_{pd}(T_k-T_p)+(L_kw_0-L_pw_{sp})$$

$$+C_w\bar{w}_s(T_k-T_p)]-g_0H_k^p\cdots\cdots\cdots (17)$$

其中 $\bar{w}_s$ 为过程平均值，并且有 $w_0>\bar{w}_s>w_{sp}$

将（17）式加上（4）式整理得：

$$E_{p0}^p=c_{pd}(T_0-T_p)+\frac{1}{1+\bar{w}_s}(L_kw_0-L_pw_{sp})$$

$$-g_0H_0^p+q_0(C_{pv}-c_{pd})(T_0-T_k)$$

$$+\frac{\bar{w}_s}{1+\bar{w}_s}(C_w-c_{pd})(T_k-T_p)\cdots\cdots\cdots (18)$$

（18）式就是适用于非载水气块在假绝热上升过程中不稳定能量的计算公式。具体计算时可取

$$\bar{w}_s=\frac{1}{2}(w_0+w_{sp})$$

将（18）式与（14）式对比得：

$$\Delta x=L_p(w_0-w_{sp})-\frac{1}{1+\bar{w}_s}(L_kw_0-L_pw_{sp})$$

$$+w_0c_{pv}(T_0-T_p)-w_{sp}c_{pd}(T_0-T_p)$$
$$-q_0(c_{pv}-c_{pd})(T_0-T_k)+C_w(w_0-w_{sp})T_p$$

$$-\frac{\bar{w}_s}{1+\bar{w}_s}(C_w-c_{pd})(T_k-T_p)+$$

$$+(w_0-w_{sp})g_0H_0$$

因为 $w_0\approx q_0$，$w_{sp}\approx q_{sp}$，$L_k\approx L_p$，$w_0\ll1$，$w_{sp}\ll1$，$\bar{w}_s\ll1$，$g_0H_0\ll C_wT_p$

所以 $\Delta x\approx C_w(w_0-w_{sp})T_p$

将 Δx 代入（14）式可得：

$$E_{p0}^p\approx c_{pd}(T_0-T_p)+L_p(q_0-q_{sp})-g_0H_0^p+$$
$$+q_0(c_{pv}-c_{pd})(T_0-T_p)$$
$$=c_p(T_0-T_p)+L_p(q_0-q_{sp})-g_0H_0^p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14-1)$$

在（12）式和（18）式中，如果将水的汽化潜热看做常量，并用 L_0 代替，再舍去等式右端量级较小的项，便可以得到更为简便的公式：

$$E_{p0}^{*p}=c_{pd}(T_0-T_p^*)+L_0(q_0-q_{sp}^*)-g_0H_0^p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

$$E_{p0}^p=c_{pd}(T_0-T_p)+L_0(q_0-q_{sp})-gH_0^p$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (20)$$

其中 $c_{pd}=1005\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$，$L_0=2.5\times10^6\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$

四、计算方法

由（12）式和（18）式可以看出：计算大气层结不稳定能量，除 H_p 需由探空资料或由高空等压面图读取外，其余资料均由地面观测资料所给定，其关键是 T_p^* 和 T_p 的计算问题。下面给出 T_p^* 和 T_p 的计算方法：

1.气块在可逆湿绝热上升过程中，由（7）式可得变态方程：

$$(c_{pd}+C_w w_0)\ln T^* - R_d\ln(p-E_s)+\frac{Lw_s^*}{T^*}=\text{Const}$$

即

$$T_p^{*\left(1+\frac{C_w}{C_{pd}}w^0\right)}\left(\frac{1000}{p-E_s}\right)^{\frac{R_d}{C_{pd}}}e^{\frac{L_p w^*_{sp}}{C_{pd}T^*_p}}=T_k^{\left(1+\frac{C_w}{C_{pd}}w_0\right)}\left(\frac{1000}{p_k-E_k}\right)^{\frac{R_d}{C_{pd}}}e^{\frac{L_k w_0}{C_{pd}T_k}}=A^* \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (21)$$

式中 e 为自然对数的底，$L_k=L_0+(c_{pv}-$

表 1 500hPa高度的T_p查算表

θse_0	430	420	410	400	390	380	370	360	350	340	330	320	310	300
0	288.1	286.6	284.9	283.1	281.1	278.9	276.3	273.4	270.1	266.2	261.8	256.6	250.6	243.9
1	288.2	286.7	285.1	283.3	281.3	279.1	276.6	273.7	270.5	266.7	262.2	257.1	251.3	244.6
2	288.4	286.9	285.3	283.5	281.5	279.4	276.9	274.0	270.8	267.1	262.7	257.7	251.9	245.3
3	288.5	287.0	285.4	283.7	281.7	279.6	277.1	274.3	271.1	267.5	263.2	258.2	252.5	246.0
4	288.6	287.2	285.6	283.9	281.9	279.8	277.4	274.6	271.5	267.9	263.6	258.7	253.1	246.7
5	288.8	287.4	285.8	284.1	282.1	280.0	277.6	274.9	271.8	268.2	264.1	259.3	253.7	247.4
6	288.9	287.5	285.9	284.2	282.3	280.2	277.9	275.2	272.2	268.6	264.5	259.8	254.3	248.0
7	289.1	287.6	286.1	284.4	282.5	280.5	278.1	275.5	272.5	269.0	265.0	260.3	254.9	248.7
8	289.2	287.8	286.3	284.6	282.7	280.7	278.4	275.8	272.8	269.4	265.4	260.8	255.5	249.3
9	289.3	287.9	286.4	284.8	282.9	280.9	278.6	276.1	273.1	269.7	265.8	261.3	256.0	250.0

表 2 凝结高度分别为950、900、850hPa时，气块上升到500、400hPa时的$T_pT_p^*$值比较表

p_k hPa	p hPa	T_k / T	273	278	283	288	293	298	303	308
950	500	T_p	235.4	242.7	250.8	259.1	267.4	275.2	282.4	289.1
		T_p^*	236.0	243.4	251.5	259.9	268.2	275.9	283.1	289.7
	400	T_p	221.4	228.8	237.3	246.7	256.6	266.1	274.7	282.3
		T_p^*	222.2	229.8	238.5	248.0	257.9	267.3	275.7	283.2
900	500	T_p	239.3	246.6	254.5	262.3	270.4	277.8	284.7	291.1
		T_p^*	239.8	247.2	255.2	263.3	271.1	278.4	285.2	291.6
	400	T_p	225.2	232.8	241.4	250.7	260.3	269.2	277.3	284.6
		T_p^*	226.0	233.7	242.6	252.0	261.4	270.2	278.2	285.3
850	500	T_p	243.3	250.6	258.3	265.9	273.4	280.4	286.9	293.1
		T_p^*	243.7	251.1	258.8	266.5	273.9	280.9	287.4	293.5
	400	T_p	229.4	237.0	245.7	254.8	263.9	272.3	279.9	286.8
		T_p^*	230.0	238.0	246.7	255.9	264.9	273.1	280.6	287.4

$C_w)(T-273)$；A^*是一个状态函数。在可逆湿绝热过程中，A^*是严格保守的，并且仅由 T_0、P_0、W_0所决定。

T_k、P_k、E_k 可由下列诸式求得：

$$T_k = T_0 - 1.21(T_0 - T_d)$$

$$P_k = P_0\left(\frac{T_k}{T_0}\right)^{C_p/R}$$

$$E_k = 6.1078 \times 10^{\frac{7.45(T_k-273)}{T_k-38}}$$

当给定 T_0、T_d、p_0 以后，先求出 T_k、p_k、E_k，再求出 w_0（混合比），然后再由（21）式求出 A^*，于是，给定气块的上升高度p，便可由（21）式求得 T_p^*值。

2．气块在假绝热上升时，其假相当位温θse是近似保守的[8]，可以利用这一性质计算 T_p。

$$\theta se_0 = T_k\left(\frac{1000}{p_k - E_k}\right)^{R_d/c_{pd}} e^{\frac{L_k w_0}{c_{pd}T_k}} \approx T_p\left(\frac{1000}{p - E_s}\right)^{\frac{R_d}{c_{pd}}} e^{\frac{L_p w_{sp}}{c_{pd}T_p}} = \theta se_p \quad \cdots\cdots (22)$$

表1就是由（22）式计算的 p为 500hPa 时的 T_p 查算表；表2是凝结高度相同时，由（21）式和（22）式算得的 T_p^*与 T_p 值的比较表。

3．计算举例

某气象站某日08h地面气压为1000hPa，气温32℃，露点27℃；500hPa等压面高度5840gpm，测站拔海高度20m。求E^{*500}_{1000}、E^{500}_{1000}？

解：$H^{500}_{1000} = 5820$gpm，$g_0H^p_0 = 57036J.kg^{-1}$

$\theta se_0 = 373.5K$，$A^* = 649.0K$

查表1得 $T_p = 277.4K$，查表2得 $T_p^* - T_p \doteq 0.6K$，

因此，$T_p^* = 278.0K$，

$q_0 = 22.6g/kg$，

$q_{sp} = 10.5g/kg$，$q^*_{sp} = 11.0g/kg$，

由（12）式和（18）式可得：

$E^{*500}_{1000} = -237J/kg$，$E^{500}_{1000} = 1453J/kg$

五、不稳定能量的预报

以假绝热过程为例，在（20）式中，令 $\frac{T_p}{T_0} = \alpha$，$\frac{q_{sp}}{q_0} = \beta$，代入（20）式得

$$E^p_{p0} = c_{pd}(1-\alpha)T_0 + L_0(1-\beta)q_0 - g_0(H_p - H_0) \quad \cdots\cdots (23)$$

将（23）式两边对时间求偏导数，得：

$$\frac{\partial}{\partial t}E^p_{p_0} = c_{pd}(1-\alpha)\frac{\partial T_0}{\partial t} + L_0(1-\beta)\frac{\partial q_0}{\partial t} - c_{pd}T_0\frac{\partial \alpha}{\partial t} - L_0 q_0\frac{\partial \beta}{\partial t} - g_0\frac{\partial H_p}{\partial t} \quad \cdots\cdots (24)$$

一般说来，若$\frac{\partial T_0}{\partial t}>0$，则$\frac{\partial \alpha}{\partial t}<0$；若$\frac{\partial q_0}{\partial t}>0$，则$\frac{\partial \beta}{\partial t}<0$。因此，由（24）式可知：$E^p_{p0}$ 将随地面温度的增加、地面比湿的增大以及高空等压面高度的降低而增加。

A simple calculating method of instability of atmospheric stratification

Li Rencheng

(Hebei Meteorological school)

Abstract

In this paper, two simple calculating formulas of instability energy of atmospheric stratification, suitable for the air parcel carrying water during its reversible saturation-adiabatic asecending process and the air parcel without water during its pseudo-adiabatic asecending process, are presented.