

吴保民 盛裴轩

王雨曾

(北京大学地球物理系, 100871) (中国气象局人工影响天气研究所, 北京 100081)

提 要

采用一维积云模式计算积云的发展和冰雹的增长, 根据当天 07 时的探空资料, 用模式计算积云的发展, 给出云顶高度, 云顶温度, 云底高度, 云中 0℃ 层高度, 云内、外温度分布, 以及云内上升气流速度和含水量的分布; 再由设定的模式计算冰雹的增长, 求出雹云中生成的最大冰雹尺度, 考虑 0℃ 层以下冰雹的融化, 计算出降到地面上的最大冰雹尺度。与实际观测的最大降雹尺度比较, 发现计算结果较好。由此得出结论, 用此模式预报最大冰雹尺度是可行的。这为冰雹预报提供了一种方法。

关键词: 积云模式 预报 冰雹 尺度

引 言

随着计算机技术的发展, 人们对冰雹和冰雹云的研究逐渐量化, 提出各种模式进行计算, 先后有一维、二维、三维模式, 选取的物理量和建立的方程组各异, 但由于影响冰雹云发展和冰雹增长的因素非常复杂, 又受地形和天气系统的制约, 因此, 用模式计算来预报冰雹的大小是复杂和困难的。目前, 采用复杂的积云模式计算的结果也并不令人满意, 而用一维、定常积云模式计算积云的生成和发展还比较符合实际, 简单实用。本文采用一维积云模式计算积云的发展和冰雹的增长, 预报雹云最大降雹尺度。

1 一维定常积云模式方程组

一维定常积云模式可以用下面一组方程来描述^[1-2]。

1.1 积云内温度随高度的变化

$$\frac{dT}{dz} = 1 / \left[1 + \frac{0.622L^2q_s}{C_p R_a T^2} \right] \cdot \left[-\frac{g}{C_p} \left(1 + \frac{Lq_s}{R_a T} \right) - \mu(T - T_e) - \mu \frac{L}{C_p} (q_s - q_e) + \frac{L_f}{C_p} \frac{\Delta Q_f}{dz} + \frac{L_s}{C_p} \frac{(\Delta q_s)_{w \rightarrow i}}{dz} \right] \quad (1)$$

式(1)中, C_p : 空气定压比热, R_a : 气体常数,

L : 湿绝热过程水的相变潜热, μ : 质量夹卷率, $\mu = \frac{1}{M} \frac{dM}{dz} = \frac{\sigma}{R_c}$, σ 常数, 取 $\sigma = 0.2$, R_c 为云底初始半径, T : 云内温度, q_s : 云内饱和比湿, T_e : 云外温度, q_e : 云外比湿, L_f : 冻结潜热, L_s : 升华潜热, $(\Delta q_s)_{w \rightarrow i}$ 表示 -10℃ 时水面与冰面的饱和水汽压差, 设 -10℃ 过冷水开始变成冰。

1.2 动量方程

$$\frac{dW}{dz} = \left[\frac{g}{1 + \gamma} \left(\frac{T_v - T_{ve}}{T_{ve}} - Q \right) - \mu W^2 \right] / W \quad (2)$$

式中, W : 云内上升气流速度, Q : 云内总的比含水量 ($g \cdot g^{-1}$), $Q = Q_c + Q_h$, Q_c : 云水含量, Q_h : 雨水含量, γ : 虚质量订正系数, 取 $\gamma = 0.5$, T_v : 云内虚温, T_{ve} : 云外虚温。

1.3 云内水份转化方程

$$\frac{dQ_c}{dz} = -\frac{dQ_s}{dz} - \mu(q_s - q_e + Q_c) - \frac{dQ_h}{dz} \quad (3)$$

$$\frac{dQ_h}{dz} = \frac{K_1}{W} (Q_c - \lambda) + \frac{K_2}{W} \rho^{0.875} Q_c Q_h^{0.875} \quad (4)$$

式中 Q_s 为云内水汽含量, 方程(3)表示水汽、云滴和雨滴之间的转化, 方程(4)表示云滴向雨滴转化, 第一项为自动转化, λ 为阈值, 取 λ

$=5 \times 10^{-4} \text{g} \cdot \text{g}^{-1}$, 当 $Q_c > \lambda$ 时, 云滴自动长为雨滴, 取系数 $K_1 = 10^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ 。第二项是碰并增长, 取增长系数 K_2 的值为 $6.96 \times 10^{-4} \text{EN}_0^{0.125}$, N_0 为雨滴谱参数, 取碰并系数 $E = 0.85$, ρ 是空气密度, 设雨滴谱服从 Marshall-palmer 分布。

根据以上一维积云模式, 由当天 07 时的探空记录, 计算出云底高度, 由统计资料给出云底的初始半径 $R_c(\text{m})$, 云底上升气流速度 $W_0(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$, 设云底 $Q_c = 0, Q_h = 0$, 由云底往上, 取每层厚度 200m 逐层计算, 得到云顶高度、云顶温度、 0°C 层高度, 云内、云外温度随高度的分布, 以及云内上升气流速度 W 和含水量 q 随高度的分布等。由模式计算得出:

(1) 雹云中含水量 q 随高度的分布如图 1 中的实线所示, 虚线是它的拟合线, 由图 1 可见, 雹云中含水量随高度的分布可近似用两个线性函数来表示。

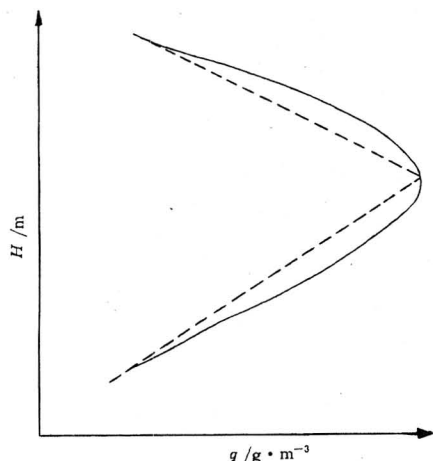


图1 模式计算的雹云中含水量随高度的分布

(2) 雹云中上升气流速度随高度的分布近似于抛物线, 如图 2 中的实线所示, 虚线是它的拟合线, 靠近抛物线顶点由高 H_1 到 H_2 , 上升气流速度差别不大, 取为最大上升气流速度区, 由图 2 可见, 雹云中上升气流速度随高度的分布可以用 3 个线性函数来表示。

图 1 和图 2 所示由模式计算得到的积云中含水量和上升气流速度随高度的分布曲线

与实际观测值比较一致^[3-4]。

在图 1 和图 2 中, 雹云中上升气流速度达到最大值的最大高度 H_2 与云中最大含水量所在高度比较接近, 为简化计算, 我们将雹云中上升气流速度 W 以及含水量 q 随高度的分布统一用以下模式表示:

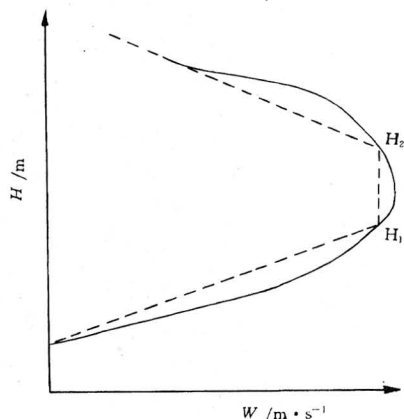


图2 模式计算的雹云中上升气流速度随高度的分布

取云底高度为零, z_2 是云中最大含水量 q_m 所在高度, 也是上升气流速度 W 达到最大值的最大高度, H 为云顶高度。

雹云中含水量 q 随高度的分布近似用两个线性函数来表示。

$$q(z) = cz \quad \text{当 } 0 < z \leq z_2$$

$$q(z) = q_m + c_1(z_2 - z) \quad \text{当 } z_2 < z < H$$

c, c_1 为系数。

雹云中上升气流速度 W 随高度的分布用 3 个线性函数来表示。

$$W(z) = az + b \quad 0 < z \leq z_1$$

$$W_m = az_1 + b \quad z_1 < z \leq z_2$$

$$W(z) = W_m + a(z_2 - z) \quad z_2 < z \leq H$$

W_m 是云中最大上升气流速度, a 为系数, b 为给定的云底初始上升气流速度。此分布如图 3 所示。

2 冰雹的增长

冰雹的增长以碰并增长占主导地位, 冰雹的碰并增长方程是:

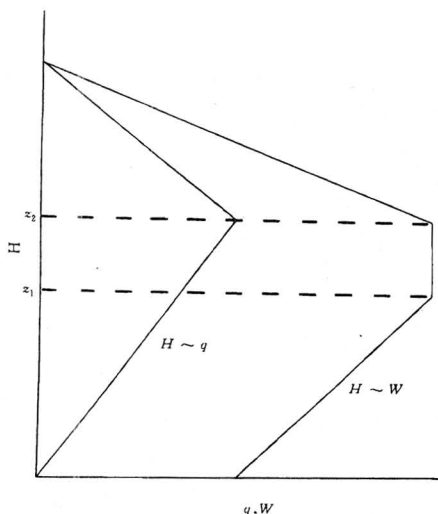


图3 雹云中含水量 q , 上升气流速度 W 随高度 H 的分布

$$\frac{dR}{dt} = \frac{Eq}{4\rho} v(R) \quad (5)$$

将 $dz = (W - v)dt$ 代入式(5), 得到

$$\frac{dR}{dz} = \frac{Eq}{4\rho} \frac{v(R)}{W - v(R)} \quad (6)$$

其中 $\frac{dR}{dz}$ 表示冰雹半径随高度的增长, q 为云中液态和固态水含量 ($g \cdot m^{-3}$), E 是碰并系数, ρ 为冰雹密度, $v(R)$ 为冰雹降落末速度, 取 $v(R) = r\sqrt{R}$, $r = 264 m^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1}$, W 为云中上升气流速度。

由式(6)可见, 冰雹半径随高度的变化, 由云中含水量和上升气流速度决定, 由上面一维积云模式计算的云中上升气流速度 W 以及含水量 q 随高度的分布模式求解方程(6), 得到计算冰雹大小的公式如下^[4]:

z_1, z_2 如图3所示, 在高度 z_2 处, 冰雹半径为 R_2

$$\sqrt{R_2} = \frac{W_m}{2r} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{W_m}{r}\right)^2 + \frac{Eq_m}{2\rho}(H - z_2)} \quad (7)$$

到达高度 z_1 时, 冰雹半径为 R_1

$$\sqrt{R_1} = \frac{W_m}{r}$$

$$+ \sqrt{\left(\sqrt{R_2} - \frac{W_m}{r}\right)^2 + \frac{Eq_m}{8\rho z_2}(z_2^2 - z_1^2)} \quad (8)$$

到达 $0^\circ C$ 层高度, 冰雹半径为 R_0 (以下近似取 z_1 为相对于 $0^\circ C$ 层高度), 设

$$\Delta = 4rA - a^2, \quad A = \frac{Erc}{8\rho}$$

当 $\Delta < 0$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{R_0} - \frac{b}{r}\right)^2 &= \left[\left(\sqrt{R_1} - \frac{b}{r}\right) - \frac{a + \sqrt{-\Delta}}{2r} z_1\right]^{1 - \frac{a}{\sqrt{-\Delta}}} \\ &\times \left[\left(\sqrt{R_1} - \frac{b}{r}\right) - \frac{a - \sqrt{-\Delta}}{2r} z_1\right]^{1 + \frac{a}{\sqrt{-\Delta}}} \end{aligned}$$

当 $\Delta > 0$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{R_0} - \frac{b}{r}\right)^2 &= \frac{1}{r} \left[r \left(\sqrt{R_1} - \frac{b}{r}\right)^2 - a \left(\sqrt{R_1} - \frac{b}{r}\right) z_1 + A z_1^2 \right] \times \\ &\exp \frac{2a}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2r \left(\sqrt{R_1} - \frac{b}{r}\right) + a z_1}{z_1 \sqrt{\Delta}} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

冰雹大小是云中含水量、上升气流速度分布, 云层厚度、 $0^\circ C$ 层高度等的函数, 由此公式及云中各量的分布即可求出 $0^\circ C$ 层上最大冰雹尺度。

3 冰雹在 $0^\circ C$ 层以下降落过程中的融化

为了计算简单, 我们假设冰雹为圆球形, 不考虑形状和表面粗糙度的影响, 对于直径小于 $1cm$ 的小冰雹, 在 $0^\circ C$ 层以下降落融化比较明显, 应考虑融化的水膜的影响, 假设融化的水均匀覆盖在冰核表面, 根据冰雹和周围空气之间质量和热量交换方程, 导出计算冰雹融化的公式^[5]:

$$\frac{1}{2} (R_0^2 - R^2) - \frac{1}{3} \left(R_0^2 - \frac{R^3}{R_0} \right)$$

$$+ \frac{K_w}{3C(K_a + L_v D_w \beta)} \left(R_0^2 - \frac{R^3}{R_0} \right) \\ = \frac{K_w \alpha x^2}{2L_f \rho_i V} \quad (11)$$

式(11)中: R_0 : 0°C 层上冰雹半径, R : 剩余的冰核半径, K_w : 水的热传导系数, K_a : 空气的热传导系数, L_v : 凝结潜热, L_f : 融化潜热, D_w : 水汽扩散系数, 取系数 $\beta = 4.8 \times 10^{-7} (\text{g} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{K}^{-1})$, C 是吹风系数, 取 $C = 1.6 + 0.3 = R_e^{\frac{1}{2}}$, R_e 为雷诺数, ρ_i : 冰雹密度, V : 冰雹下落速度。

对于直径在 1cm 以上的冰雹, 假设融化的水随时脱落, 冰雹表面是湿润冰面, 温度为 0°C , 则冰雹融化、半径 R 随高度的变化由下列微分方程给出:

$$4\pi\rho_i L_f V^2 R^2 \frac{dR}{dz} = -4\pi RC \cdot (K_w T_a + L_v D_w \Delta\rho) - E\pi R^2 V W_f T_a \quad (12)$$

T_a : 空气温度($^\circ\text{C}$), $\Delta\rho$: 温度为 T_a 与 0°C 之间饱和水汽密度差。

对于直径在 1cm 以上的冰雹, 由于 $R_e \gg$

附表 一维积云模式计算降雹最大尺度(河北省满城防雹点 1987—1990 年)

日期	云顶高 H_p/m	云底高 H_d/m	0°C 高 H_0/m	最大升速 $W_m/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	最大含水量 $Q_m/\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$	0°C 雹 d_0/cm	地面雹 d_c/cm	实测雹 d_m/cm
87629	12282.9	1882.9	4499.7	26.6	4.6	3.3	3.1	3.6
88903	10194.8	2394.8	3791.3	14.3	3.7	1.3	1.0	2.1
89630	10721.7	2921.7	3745.2	20.8	3.0	1.5	1.2	1.7
89713	11225.6	3025.6	4503.3	24.3	3.2	2.3	2.0	1.1
89828	12029.4	3029.4	4714.4	26.8	3.4	2.5	2.1	2.1
90529	9643.1	2843.1	3641.4	16.6	3.0	1.3	1.0	2.5
90608	10002.0	2202.0	2978.3	27.7	3.2	2.2	2.1	1.7
90716	12429.7	3029.7	4923.6	27.0	3.6	2.6	2.3	3.5

注: 同时有当日探空记录和降雹大小取样记录的资料只有这 8 次。

附表中所列的各量, 87629 是日期 1987 年 6 月 29 日, $d_0(\text{cm})$ 是模式计算的 0°C 层上的最大冰雹直径, $d_c(\text{cm})$ 为考虑冰雹在 0°C 层以下的融化, 模式计算的降至地面上的最大冰雹直径, $d_m(\text{cm})$ 为观测到的实际降雹的最大冰雹直径。比较 d_c 与 d_m 的值, 8 次降雹模式计算的降至地面上的最大冰雹直径与观测到的实际降雹的最大冰雹直径的平均相对

1, 取 $C \approx 0.3R_e^{\frac{1}{2}}$, 用 $\frac{\Delta R}{\Delta z} \approx \frac{dR}{dz}$, 取 $\Delta z = 10\text{m}$, 从 0°C 层往下, 逐段计算 ΔR , 得到剩余冰核大小, 最后求出降落到地面上的最大冰雹尺度。

4 计算结果

根据以上方程编写计算程序:

(1) 由当天 07 时的探空资料, 计算积云的生成和发展, 得到云底高度, 云顶高度、云顶温度, 0°C 层高度, 云中含水量及上升气流速度随高度的分布, 结合天气系统及别的观测资料(如雷达观测资料等), 综合分析, 预报当天是否出现降雹, 若无降雹, 则结束计算。

(2) 若有降雹, 用模式继续计算冰雹的生成和增长, 给出 0°C 层上最大的冰雹大小, 计算 0°C 层以下冰雹的融化, 得到降到地面上的最大冰雹的大小。

我们对河北省满城防雹点 1987—1990 年, 同时有当日探空记录和降雹大小取样记录的 8 次资料^[6], 进行了计算、对比, 结果见附表。

误差为 31%, 可见用此模式来估算、预报最大降雹尺度是可行的。

5 结果分析

比较附表中最大降雹尺度的预报值与实测值, 有的符合较好, 有的误差较大, 产生误差的主要原因是:

5.1 我们采用的模式比较简单, 不能全面反

映积云生成和发展变化,对于冰雹生成和增长的计算也比较简单。

5.2 我们计算使用的探空资料是07时的,而降雹多发生在午后,期间大气层结会有较大变化。

5.3 实际降雹尺度取样也有误差,实际测量的最大冰雹尺度有误差。

6 冰雹形状和表面粗糙度的影响

在我们的计算模式中,假定冰雹为表面光滑的球形,这对大多数降雹是可以的,但实际冰雹(特别是大冰雹)有椭球形、扁球形、圆锥形、不规则形状等,且表面粗糙,如果考虑形状和表面粗糙度的影响,计算冰雹的增长和融化将是非常复杂的,这里,我们对这些因素的影响作一简要的说明,看看它们对冰雹尺度预报的主要影响。

6.1 形状的影响:对于相同质量的冰雹,光滑球形的表面积最小,非球形冰雹的表面积相对较大,这有利于冰雹与周围进行热量交换,有利于冰雹在下落过程中的融化,可见,考虑冰雹形状的影响,非球形冰雹的融化比同质量的圆球形冰雹快。

6.2 表面粗糙度对冰雹融化的影响:由于冰

雹表面粗糙,增加了冰雹的表面积,有利于冰雹与周围进行热交换,同时,表面粗糙的冰雹下落时湍流尾迹区增大,使冰雹与外界的湍流热交换增强,也有利于冰雹的融化。另外,表面粗糙使冰雹的阻力系数增大,降落速度变小,冰雹在空中停留的时间变长,有利于冰雹的融化。

可见,冰雹的不规则形状和粗糙表面都有利于冰雹的融化,而我们以上假定冰雹为表面光滑的球形,这使得计算的冰雹尺度比实际降雹尺度偏大,也就是说,我们预报的雹灾偏严重一点,这对防雹的决策是有利的。

参考文献

- 1 毛节泰,盛裴轩等.用积云数值模式预报冰雹的探讨.气象学报,1982,40(1).
- 2 MOORE J. T. AND PINO, J. P. An Interactive Method for Estimating Maximum Hailstone Size from Forecast Soundings. Wea. and Forec., 1990.
- 3 徐家骝.冰雹微物理与成雹机制,北京:农业出版社,1979.
- 4 赵柏林,薛凡柄.关于冰雹成长的机制.气象学报,1963,33(4).
- 5 B. J. MASON. On the melting of hailstones. Q. J. R. M. S., 1956, 82.
- 6 王雨曾等.人工防雹实用技术,北京:气象出版社,1994.

Forecasting Maximum Hail Size with a Numerical Model of Cumulus

Wu Baomin Sheng Peixuan

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871)

Wang Yuzeng

(Chinese Meteorological Administration, Beijing 100081)

Abstract

The one-dimensional time-independent cumulus model is used to compute the hail size. By means of the sounding data at 07 o'clock as input, the altitude and temperature of the cumulus top, the altitude of the cumulus base, the altitude of 0°C level in cumulus, the distributions of temperature and vertical velocity of upward current and the water content in cumulus can be given. We calculate the growing and melting of hail and forecast the maximum hail size as it falling on the ground. Comparison of forecast and measurement of the maximum hail size make us satisfied. It indicates that using this model to forecast the maximum hailstone size is feasible. This provides a method of hail forecasting.

Key Words: cumulus model forecast hailstone