MOS预报方程对数值预报模式的自适应性探讨

朱盛明　　　　王德隽
（江苏省气象科学研究所）　（苏州市气象台）

一、引言

近年来，由于数值预报技术的迅速发展，数值预报业务模式更替频繁，使MOS方法的优越性受到一定影响。一般说来，当数值模式的物理特征变动不大，同样是差分模式，只是网格大小及层次的变化，通常不致影响MOS预报的准确率；但如数值模式变动较大，例如从差分模式变为谱模式，则这种影响是不能忽视的，国外有关的近期资料已说明了这个问题。目前，国外解决这一问题的方法是选用那些对模式变化不太敏感的因子，例如在预报最高温度时，选用两层间厚度，而不用某一层的温度值作为预报因子。这样做固然可以使方程在模式改变时受到的影响较小，但动力模式的改进也就不能迅速反映到天气预报中来。因此，MOS方程对数值模式的自适应性问题，在数值预报产品应用技术中，是一个很重要的方面。

概率估计方法在MOS方法中已得到广泛的应用，人们应用这些方法作出降水发生概率、不同量级降水的出现概率和降水类型的概率预报以及其它天气要素的概率预报。最初是用作定性预报，较为客观地给出某种天气现象出现的可能性，从而避免了天气预报结论表达方式的“绝对化”倾向。进而，当人们对预报量分级后，同一天气现象在不同级出现的概率给出了粗略的定量预报；若把级分得越细，就能得出越接近定量预报的概率分布。所以，概率估计方法是当前数值预报产品应用中的一个基本方法。因此，本文对应用于MOS方法中的几种概率估计方法的原理、方法和使用效果进行讨论，以便人们通过客观评价选用较为适合于MOS方法的概率估计方法。

二、资料和算法

本文是从1982年3—6月日本数值预告传真图正方形网格点上读取500毫巴高度、700毫巴垂直速度、850毫巴温度、地面气压以及雨量的36小时预告值，经过概率图组成筛选出5个因子，共122个样本，用6种概率估计算法，分别建立苏州市24—48小时无雨（<0.04毫米）、小雨（0.04—9.9毫米）及≥10毫米3个量级降水概率预报关系，并用1983年同期的86次预报进行检验。使用的6种概率估计算法为：

（1）基于Bayes定理的计量法（MM）

$$I_i = 10[\lg p(y_i) + 1] + 10[\lg p(x_1/y_i) + 1] + \cdots\cdots + 10[\lg p(x_m/y_i) + 1] \quad (1)$$

式中 I_i 是第 i 类降水量出现的计量值，lg 是常用对数。$p(y_i)$ 是 i 类降水量出现的先验概率，x_1，$x_2 \cdots\cdots x_m$ 相互独立，$p(x_1/y_i) \cdots\cdots p(x_m/y_i)$ 分别表示出现第 i 类天气时 x_1，$x_2, \cdots\cdots x_m$ 出现的条件概率。

（2）分类转移概率（TP）

转移概率矩阵是根据当时天空实况与未来24—48小时的降水量级，按预报图上因子值分两类进行统计而得，

$$\begin{pmatrix} f_{11}^{i1} & f_{12}^{i1} & f_{13}^{i1} \\ f_{21}^{i1} & f_{22}^{i1} & f_{23}^{i1} \\ p_{31}^{i1} & p_{32}^{i1} & p_{33}^{i1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{11}^{i2} & f_{12}^{i2} & f_{13}^{i2} \\ f_{21}^{i2} & f_{22}^{i2} & f_{23}^{i2} \\ p_{31}^{i2} & p_{32}^{i2} & p_{33}^{i2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中下标1表示未来24—48小时无雨，2表示小雨，3表示中雨以上。上标 $i = 1, 2\cdots\cdots 5$ 代表因子序号，$i1$ 表示第 i 个因子第1类，

$i2$ 表示第 i 个因子第 2 类。从（2）式可看出，共得 5 对转移概率矩阵。每次制作预报时由当时天气实况 k 和第 i 个因子所在档 j 求得三类降水量级出现概率平均值

$$(\bar{p}_{k1},\ \bar{p}_{k2},\ \bar{p}_{k3}) \qquad (3)$$

其中

$$\bar{p}_{kl}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}p_{kl}^{ij} \quad l=1,2,3, j\text{ 取决于 } i。$$

（3）事件概率回归模型(REEP)

$$\hat{y}_i=b_0+\sum_{i=1}^{m}b_ix_i,\ \ i=1,2\cdots\cdots5 \qquad (4)$$

$\hat{y}_i$ 是第 i 类天气出现的概率估计值。x_i 是因子，b_i 是回归系数。

（4）判别函数的 logit 估计量（DFLE）

令 $\mathbf{x}$ 为由因子组成的随机向量，S 是 $\mathbf{x}$ 的协方差阵，y 是所要预报的某类天气出现的概率估计，a 是常数项，$\mathbf{b}$ 是回归系数向量，则

$$y=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-(\mathbf{a}+\mathbf{b}'\mathbf{x})}} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{b}=S^{-1}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0)\\&a=-\lg(n_0/n_1)-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0)'\mathbf{b}\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

（5）、（6）式中 $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ 是 y 为 0 和 1 时的 x 均值，n_0、n_1 分别为其样本数。

（5）logit回归模型的迭代算法(LRI)

logit回归模型是

$$y=\frac{1}{1+e^{-\mathbf{x}'\beta}} \qquad (7)$$

其中 $\mathbf{x}$ 的第一分量 $x_1\equiv1$，$\boldsymbol{\beta}$ 是回归系数向量。

令 $\mathbf{b}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的初值，由非线性最小二乘法推得的 logit 回归模型迭代算法的正规方程为

$$X'\hat{P}\hat{Q}X\,(\widehat{\boldsymbol{\beta}-\mathbf{b}})=X(y-\hat{y}) \qquad (8)$$

式中

$$\hat{y}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\mathbf{x}'\mathbf{b}}},\quad \hat{P}=\begin{bmatrix}\hat{y}_1, & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{y}_n\end{bmatrix},$$
$$\hat{Q}=I-\hat{P} \qquad (9)$$

X 为样本资料矩阵，n 为样本数，把迭代后订正所得的回归系数作为初值，用（8）式反复计算订正值 $(\widehat{\beta-b})$，直到足够小时停止。

（6）Logit 回归模型的递推算法（LRR）

设由 $n-1$ 次记录求得的估计量为 b_{n-1}，$\Sigma_{n-1}=Var(b_{n-1})$，根据第 n 次实测值($\mathbf{x}_n$, y_n）来更新 β 和 Σ 估计值的思想[1]，其递推关系如下：

$$\Sigma_n=\Sigma_{n-1}-\frac{\Sigma_{n-1}\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n'\Sigma_{n-1}}{\mathbf{x}_n'\Sigma_{n-1}\mathbf{x}_n+[\hat{y}_n(1-\hat{y}_n)]^{-1}} \qquad (10)$$

$$b_n=b_{n-1}-\frac{\Sigma_{n-1}\mathbf{x}_n(y_n-\hat{y}_n)}{\mathbf{x}_n'\Sigma_{n-1}\mathbf{x}_n+[\hat{y}_n(1-\hat{y}_n)]^{-1}} \qquad (11)$$

其中 $$\hat{y}_n=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x_n'b_{n-1}}} \qquad (12)$$

三、检验和评价的方法

对于几种概率估计方法的检验和评价主要是对其可靠性、精确性和技术得分加以确定。

可靠性是指每一个预报样本的预报概率和实测频率之间的对应关系。因为我们把降水量级预报处理为三个二元变量来进行预报，对预报量的这种属性习惯上使用可靠性图表进行定量检验。可靠性图表是由预报概率轴和实测频率轴组成的直角坐标系。预报概率和实测频率相等的 45° 对角线代表完全可靠性，把它和连接各样本点的曲线相比较，就可以定量描述 6 种概率估计算法作三类降水的频率预报的误差。

精确性代表各次预报与观测之间相符的平均情况。因为我们讨论的是对 3 个有序变量预报的精确性，所以采用有序概率得分 RPS 值作为精确性的基本判据。设对 K 类天气分别预报的出现概率为 p_1、$p_2\cdots\cdots p_k$，C/L 为成本-损失比，则由决策函数

$$d_i(p, C/L) = \begin{cases} 1 \text{ 当} \sum_{j=1}^{i-1} p_j < C/L \leqslant \sum_{j=1}^{i} p_j \\ 0 \quad \text{其它情况} \end{cases} \quad (13)$$

$i = 1, 2, \cdots\cdots K$

得到的极大期望效益为[2]

$$\bar{U}_z = \int_0^1 \sum_{i=1}^{K} U_{iz} d_i(p, C/L) f(C/L) d(C/L) \quad (14)$$

(14) 式中 $u_{iz} = 1 - C_{ij}/L$，L 是损失，C_{ij} 是成本-损失矩阵元素。$f(C/L)$ 是 C/L 的分布函数。假定成本-损失比为均匀分布，即当 $0 \leqslant C/L \leqslant 1$ 时，密度函数 $f(C/L) \equiv 1$，有序概率得分的表达式为

$$RPS_j = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(K-1)} \sum_{i=1}^{K} \left[\left(\sum_{n=1}^{i} p_n \right)^2 + \left(\sum_{n=i+1}^{K} p_n \right)^2 \right] - \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^{K} |i-j| \cdot p_i \quad (15)$$

其中 j 表示实际出现天气的类别。

技术得分是指概率统计预报精确性对气候概率预报精确性的相对改进，通过技术得分检验才能检验各种方法的预报能力，由于 (15) 式表示的 RPS 具有正方向，即 RPS 愈大精确性愈高，所以技术得分的表达式为

$$SS = \frac{\overline{RPS_f} - \overline{RPS_c}}{\overline{RPS_c}} \times 100\% \quad (16)$$

(16) 式中 RPS_f 是预报的平均得分，RPS_c 是依据 20 年资料统计得出的气候规律所作的气候预报的平均得分。

四、一些结果

我们给出了 6 种概率估计算法对三类降水量预报概率的可靠性检验图（图 1—3）。图中把所有概率（频率）值分成 11 个等级，即 {0.00, 0.10, 0.20……1.00}。为了清晰，6 种方法对同一等级降水量预报的可靠性检验分别用两张图表示。图中 45° 的对角线表示预报概率与实测频率相等，可靠性最大，而每一个样本点，则是由预报概率和同类样本中相应天气实际出现的频率所决定的，样本数标在样本点旁边。

图 1 是预报无雨的可靠性检验。由图可见，计量法所预报的概率值多出现在 0.30—0.60 之间，而转移概率法预报值多在 0.40—

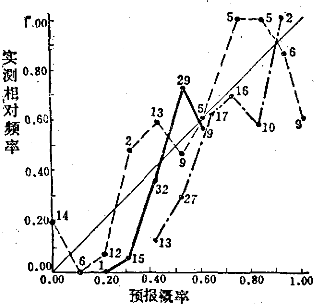

图 1a 计量法（实线）、分类转移概率法（点划线）、事件概率回归估计法（虚线）预报无雨的可靠性检验

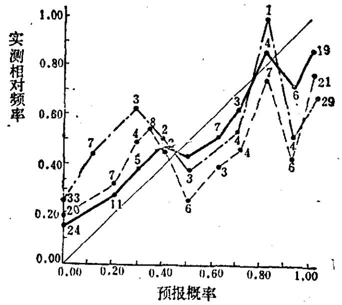

图 1 b logit 回归模型的递推算法（实线）、迭代算法（点划线）、判别函数的 logit 估计量（虚线）预报无雨的可靠性检验

0.90 之间，判别函数的 logit 估计量较多地取极端值，事件概率回归法次之。logit 方法有系统性偏差，即对较小概率预报值偏小，而对较大概率预报值偏大。logit 回归模型的迭代算法虽改进了对较小概率预报值的偏差，但增大了对较大概率预报值的偏大倾向。logit 回归模型的递推算法在两方面都减少预报误差，而得到了一条比较靠近于 45° 对角线的折线。

图 2 是对预报小雨的可靠性检验。由图可见，计量法只取 0.30—0.50 的概率值，且都偏小，转移概率法的取值减小为 0.10—

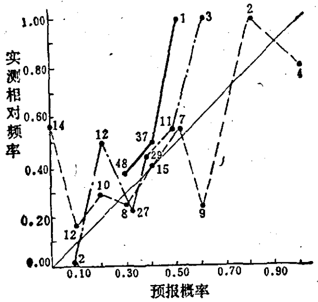

图 2a 计量法（实线）、分类转移概率法（点划线）、事件概率回归估计法（虚线）预报小雨的可靠性检验

0.60间。判别函数的 logit 估计量、事件概率回归估计法都有对较小概率预报偏小，而对较大概率预报偏大的情况，而且比图 1 更明显。同样，logit 回归模型的迭代算法和递推法的可靠性还是令人满意的。

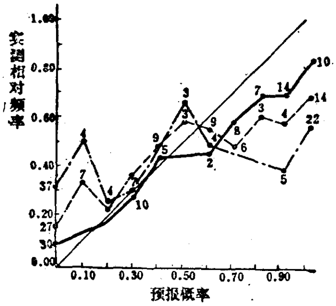

图 2b logit 回归模型的递推算法（实线）、迭代算法（点划线）、判别函数的 logit 估计量（虚线）预报小雨的可靠性检验

图 3 是对预报中雨以上降水的可靠性检验。由图可见，6 种算法对 0 概率预报都是偏小的，而对非 0 概率预报都偏大。如计量法所取概率值范围已比前两类降水预报偏小，在0.1—0.4之间，但仍比实测频率偏大。事件概率估计法的预报概率在 0.3 以上几乎是一条平行于横坐标的直线，也就是预报概率对实际出现频率已很少有指示意义。logit 回归模型的迭代算法和递推算法相对来说可靠性较好。

纵观这三张图可见，计量法和转移概率法预报值所取范围较小，而且随着预报量级

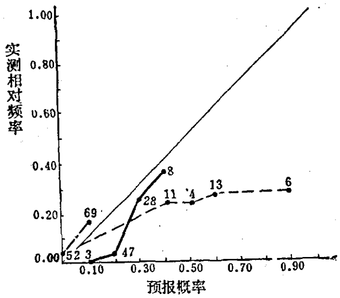

图 3a 计量法（实线）、分类转移概率法（点划线）、事件概率回归估计法（虚线）预报中雨以上降水的可靠性检验

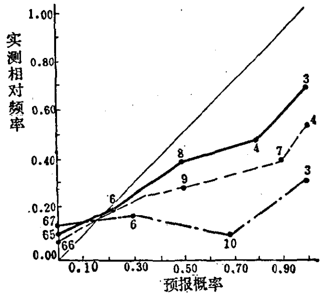

图 3b logit 回归模型的递推算法（实线）、迭代算法（点划线）、判别函数的 logit 估计量（虚线）预报中雨以上降水的可靠性检验

增大而向原点移动，其它方法在区间〔0.0，1.0〕内取值，而判别函数 logit 估计量较多地预报出极端概率值（0.0 或 1.0），事件概率回归估计法对无雨和小雨的预报值系统性误差较少，但中雨以上降水量级不同预报值所对应的实测相对概率几乎是一样的。判别函数的 logit 估计量对三类降水量级都有对较小概率值预报偏小，而对较大概率值预报偏大的特点。但 logit 模型的迭代算法和递推算法的预报效果得到改进，尤以 logit 回归模型的递推算法的可靠性相对是最好的。这还可以从附表所示 6 种概率估计算法对三类降水量级预报的平均概率与实测频率对照得到证明。总的对应关系是不错的，其中 logit 回归模型的预报效果相对较好。

各种概率估计算法按有序得分RPSJ 所计算的精确性以及技术得分 SS 也在附表中给出。总的说来，6 种概率统计法的得分比

较接近。

由于计量法对三类降水量预报概率取相似值，按极大化期望效益的决策准则，有序概率得分较高，而较多地取极端概率值的判别函数的 logit 估计量得分下降了，事件概率回归估计法和分类转移概率法则居中。但logit回归模型的递推算法得分较高，它的技术得分也最高。

附表

计算方法	平均预报概率			RPS,	SS
	无雨	小雨	中雨以上		
计量法	0.429	0.336	0.235	0.8366	18
分类转移概率	0.508	0.378	0.097	0.8311	17
事件概率回归估计	0.437	0.338	0.224	0.8322	17
判别函数 logit 估计量	0.461	0.410	0.139	0.7622	8
logit回归模型迭代法	0.459	0.405	0.142	0.8436	19
logit回归模型递推法	0.463	0.409	0.135	0.8649	22
实测相对频率	0.465	0.407	0.128		

五、讨论和结论

本文利用1982年春季 122 个数值预报模式输出的历史样本，用 6 种概率估计法求得预报关系，对1983年同期 86 个数值预报模式输出样本作了试报，进而用可靠性图表、有序概率得分、技术得分进行了可靠性、精确性和技术性能的检验与评价，初步结论如下：

6 种概率估计法的平均预报概率与实测相对频率比较接近（见附表），只是对无雨和小雨预报概率略偏小，而对于中雨以上的降水量级预报有偏大趋势。

计量法对三种量级预报都在相近的小区间内取值，其分辨能力不如其它方法，而且应用（1）式的一个重要条件——预报因子相互独立性，也不易满足。

根据从数值预报产品中选取的因子所在类作分类转移概率预报，方法比较简单，但其可靠性及有序概率得分和技术得分居中。

以上两种方法在点聚图上分区域求条件概率和分类时或多或少带有主观任意性。

事件概率回归估计法对无雨预报的可靠性较好，但对中雨以上降水量的预报能力很差。它的有序概率得分和技术得分与分类转移概率法相近。

判别函数的 logit 估计量便于计算，但它是据多元正态分布的密度函数推导而得，一般不易满足要求，所以它具有明显的误差，有序概率得分和技术得分也较低。但 logit 模型的迭代算法，使回归系数将得到极大似然估计值，所以它的预报效果较前者提高了许多。而 logit 回归模型的递推算法能根据新的数值预报产品不断更新回归系数，相对地独立于回归系数的初值。日本气象厅在1983年 3 月 1 日更换了数值预报模式，其它几种方法都是根据1982年的数值模式输出资料统计的预报关系，只有递推算法由于不断吸收新的信息来更新回归系数，使回归方程更适于新的模式，因而它能取得较高的有序概率得分和技术得分。在MOS 方法中，由于气象中心的数值模式不断改进和更替，地方气象台的预报员往往来不及根据新的数值预告产品变换预报关系，所以 logit 回归模型的递推算法更能适应于业务天气预报的需要。

由于受到资料的限制，本文所用的统计样本和检验样本都还太少，所以检验的结果，还带有一些随机性，而且所讨论的方法只是常用的几种概率估计算法。今后，应在大量积累资料的基础上作更为详细和广泛的检验，例如不仅用标量的方法也要用向量的观点对可靠性和技术得分作进一步的检验与评价，以便人们能根据客观评价选用一种自适应性较好的概率估计方法。

参考资料

〔1〕 S.H. Walker and D. B. Duncan, Eslimation of the probability of an event as a function of several independent variables, Biometrika, Vol.54, 1967, p315—327.

〔2〕 A. H. Murphy, A note of the ranked probability score, J. of App. Meterorol. Vol. 10, 1971, p155—156.