



# 动力气象讲座

## 第七讲 大气中的波动

黄荣辉

大气中存在着各种各样的运动，如促使对流云发展的重力波、产生大范围天气变化的大气长波。为了掌握大气中这些运动的规律，我们必须了解发生在大气中各种波动的物理机制。为了突出某种波动的物理本质，我们可以经过一些假设，把一些基本方程组简化，下面，先介绍在本讲所要用到的两个基本假定，即 $\beta$ 平面近似及小扰动法。

### 一、 $\beta$ 平面近似与小扰动理论

#### 1. $\beta$ 平面近似

我们首先假定运动局限于比较窄小区域，运动的水平特征尺度 $L$ 与地球半径 $a$ 之比是小的，即 $\frac{L}{a} \ll 1$ ，这样就可以略去地球曲率的影响，地转偏向力可以简单地表示成 $f = f_0 + \beta y$ ，式中 $f_0$ 就是某一纬度的地转偏向力， $\beta \approx \frac{df}{dy}$ 就是地转偏向力随纬度的变化并取为常数，这就称 $\beta$ 平面近似。在热带地区， $f_0$ 很小，因此，可以写成 $f = \beta y$ ，即称为赤道平面近似。

#### 2. 小扰动法

在第二讲中所推导的基本运动方程组都是非线性的，很难求出它们的解。为了解所表示的物理意义，一般把方程中的变量分成两部分：一部分称基本状态，通常与时间无关，它只是空间坐标的已知函数；另一部分是扰动部分，它表示与基本状态的偏差，例如气流在 $x$ 方向的速度 $U(x, y, t)$ 可表示成

$$U(x, y, t) = \bar{U}(x, y) + u'(x, y, t) \quad (7.1)$$

$\bar{U}(x, y)$ 是基本气流， $u'$ 是与基本气流的偏

差，即扰动气流。小扰动理论就是假设当扰动部分为零时，基本状态的各变量本身必须满足运动方程组，并且扰动变量相对基本量是足够小的，因此使得控制方程中所有扰动变量的二次以上的项都可以忽略，即略去所有的非线性项。把非线性方程变成线性方程，从而容易求出方程的解析解。

随着非线性方程的理论进展，扰动变量不必足够小了，而只假设扰动的振幅是有限的，这样就保留扰动变量的二次以上的项，从而可得到非线性波。

### 二、大气中的各种波动

#### 1. 声波

声波是由于大气中辐散、辐合而引起绝热膨胀和压缩而产生的。为了便于考虑辐散、辐合，我们采用 $Z$ 坐标系，并假定扰动只在 $x$ 方向传播，因此 $v = w = 0$ 。若忽略地转偏向力的作用，用上面所讲的小扰动法可得到描述声波的方程组。

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{dp'}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} \\ \frac{d \ln \theta'}{dt} = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

式中 $\theta'$ 是扰动位温，可写成

$$\theta' = \frac{p'}{\rho R} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$$

如设波动方程的解是 $p' = A e^{ik(x-ct)}$   
 $k$ 是 $x$ 方向的波数， $c$ 就是波在 $x$ 方向的相

速度。把  $P'$  代入 (7.2) 式, 可得到相速度

$$c = \bar{U} \pm (\gamma RT)^{\frac{1}{2}} \quad (7.3)$$

$\gamma$  是干绝热温度递减率。在绝热情况下, 声速为 330 米/秒左右。

## 2. 重力波

空气块相对于原来位置作垂直上下振荡, 这就是重力波, 它是以浮力作为位移的原动力的一种波动。假设地球不旋转, 即  $f=0$ , 并假设运动不依赖于  $y$ , 扰动只沿  $x$  方向传播, 这样由小扰动法可得到描述重力波的方程组。

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x} + gH \frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

式中  $H$  是大气的平均高度。这样可得到波的相速度  $c = \bar{U} \pm \sqrt{gH}$ , 从此式可以看到波的相速度是与重力有关, 如果  $g=0$ , 波就不存在了, 故称之为重力波。还可以看到重力波的波速与波数无关, 故重力波是非频散波, 并且它以  $\sqrt{gH}$  的速度向  $x$  的正、负方向传播, 它的相速度大约为 200 米/秒左右, 因此重力波是快波。

由于大气存在密度层结, 两种不同密度的不可压缩流体的不连续面上也可以产生重力波。重力波可以沿水平方向传播, 也可以沿垂直方向传播, 虽然它对于天气尺度的短期预报并不重要, 但它是山地背风波的形成原因 (见图 7.1)。重力波在中、小天气系统中起着很大作用。如在暴雨的形成中, 重力波的传播是被认为向暴雨天气系统中输送能量和动量的一个重要机制。

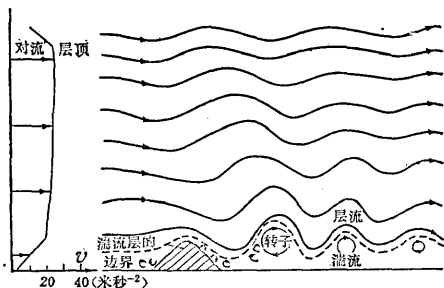


图 7.1 根据观测而得到的背风波流线示意图

## 3. 惯性重力波

前面所讲的重力波是假定地球没有旋转, 实际上地球是旋转的, 因此, 重力波将受地球自转的影响而变形, 这种考虑地球自转作用下的重力波称为惯性重力波。若考虑地转偏向力的影响, 方程组 (7.4) 可写成

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} - f_0 v' = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + f_0 u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \phi'}{\partial x} + gH \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

因为我们所考虑的运动不仅在  $x$  方向传播, 而且在  $y$  方向也传播, 即  $\phi' = \Phi_0 e^{i(kx + ly - \sigma t)}$ , 这样可得到波的相速度  $c$ ,

$$c = \bar{U} \pm \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{f_0^2}{gH(k^2 + l^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.6)$$

从式中可以知道惯性重力波的位相速度依赖于波数, 称这样一类波为频散波。惯性重力波的相速度总比重力波的相速度大。

## 4. 罗斯贝波

前面所谈的波动都认为地转偏向力  $f$  不随纬度而变化的情况。实际上  $f$  是随着纬度不同而不同的, 即产生  $\beta$  效应, 这样将产生一种气象上最重要的波动——罗斯贝波。为了突出罗斯贝波的本质, 我们假定运动是在静力平衡下产生, 运动是在  $\beta$  平面上进行, 这样就有下列扰动方程组。

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} - f v' = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + f u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \phi'}{\partial x} + gH \left( \frac{\partial \phi'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

于是我们得到了罗斯贝波的位相速度, 即

$$c_1 = \bar{U} - \frac{\beta}{(k^2 + l^2) + \frac{1}{\lambda^2}} \quad (7.8)$$

另外还可以得到惯性重力波的相速度, 即

$$c_{2,3} = \bar{U} \pm \left( \frac{f_0^2}{gH(k^2 + l^2)} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{gH} \quad (7.9)$$

(7.8) 式中  $\lambda = \sqrt{gH} / f_0$ , 称罗斯贝变形半径。k 与 l 分别是 x 与 y 方向的波数。图 7.2 表示 (7.8) 与 (7.9) 式所表示的波动。方程组 (7.7) 包含了三个不同的波, 即东进的惯性重力波、西进的惯性重力波及西进的罗斯贝波。并且以位相速度为  $\sqrt{gH}$  的凯尔文波 (下面叙述) 为分界, 很清楚地区分成位相速度快的惯性重力波与位相速度慢的罗斯贝波。

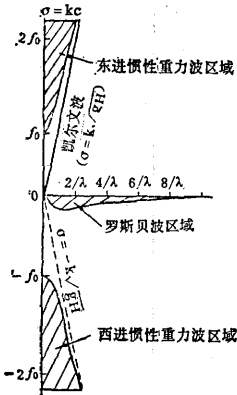


图 7.2 惯性重力波、凯尔文波、罗斯贝波波数与频率 ( $\sigma = kc$ ) 关系示意图

从 (7.8) 式可以看到罗斯贝波是一种频散波, 并且, 它只能向一个方向移动, 相对于纬向平均气流而言, 罗斯贝波总是向西传播的。对于中纬度地区, 若取纬向波长约 6000 公里、经向宽度为 3000 公里, 由 (7.8) 式可以算得罗斯贝波相对于纬向平均气流的波速是 -6 米/秒。如设基本气流为 20 米/秒, 这样罗斯贝波波速为 14 米/秒。而一般惯性重力波是  $\pm 280$  米/秒, 可见罗斯贝波是一种慢波, 我们在高空图上所看到的天气系统正是缓慢东移的。

### 三、滤波的概念及方法

从上可知在大气运动基本方程组中包含有快波 (如声波、重力波) 及慢波 (罗斯贝波)。如果直接应用未经简化的运动方程组来预报天气系统的变化, 则必须要求时间步长特别短, 空间差分格距也要特别小, 否则就会引起计算不稳定, 初始资料的误差在计算

过程中迅速扩大, 因此造成在气象上具有重要意义罗斯贝波被这些误差所掩盖。在十九世纪二十年代, 理查逊应用了未经简化的基本方程组来作天气预报, 结果失败了, 其主要原因就是由于上面所说的声波、重力波的振幅虚假地扩大, 从而掩盖掉气象上最重要的罗斯贝波。解决这个问题最简单的方法就是简化运动方程组以消除气象上不需要的快波, 只保留气象上具有重要意义的波动, 这就是“滤波”。

#### 1. 声波的过滤

只要在基本方程组中引进静力平衡就可以消除声波。因为声波是由于介质的交替绝热压缩和膨胀而得到传播的, 如图 7.3 所示,

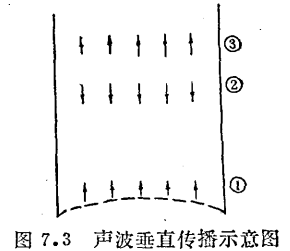


图 7.3 声波垂直传播示意图

空气由于某种原因在①处受到压缩, 将产生一气压梯度力, 这使得②、③地点的空气质点向周围产生加速运动, 结果使得②—③区域之间的空气受到压缩, 在该区域又产生气压梯度力, 使那里的空气加速移出, 这样, 在③的上边又产生新的压缩区。所以, 由于空气交替压缩和膨胀引起了连续的绝热增压和减压, 这样管子底部所产生的扰动就沿管子传播。假如气压维持静力平衡, 则管子中任何一点的气压完全由该点以上的重量所决定。因此, 绝热压缩不会影响垂直压力梯度, 声波就不能沿垂直方向传播。这样就能滤去垂直方向的声波。下面, 我们利用波动方程来说明这种滤波原理。

把方程组 (7.2) 加上 Z 方向的扰动, 就有下列扰动方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho} u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial \bar{\rho} w'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\left( \frac{\partial \bar{\rho} u'}{\partial x} + \frac{\partial \rho' w'}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial p'}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\bar{N}^2 \bar{\rho} w' \end{cases} \quad (7.10)$$

上式中  $\mu=0$  表示静力平衡,  $\mu=1$  表示非静力平衡,  $\tilde{N}^2$  是大气静力稳定度。若假设运动处于静力平衡, 即  $\mu=0$ , 并且  $R\bar{T}=gH$ , 这样方程组 (7.10) 就只有两个根, 即

$$c \approx \pm \sqrt{\frac{\tilde{N}^2 g}{c_0^2 (m^2 + 1/4H^2)}} \quad (7.11)$$

$m$  是垂直方向的波数, (7.11) 式是重力内波的波速, 因此, 声波就不存在了。从此可以看到用静力平衡就能滤去一般的声波。但是, 在静力平衡大气中仍然可以有一种在水平方向传播的声波, 它是边界层中的压力振荡, 为了滤去这类波动, 必须在下边界有  $\omega = dp/dt = 0$ 。

## 2. 重力波的过滤

只要应用地转平衡就可以滤掉重力波。当纬向风速与南北方向的风速满足地转风平衡, 这样, 水平散度为零, 引进流函数  $\psi$ , 则  $u' = -\partial\psi/\partial y$ ,  $v' = \partial\psi/\partial x$ , 这样方程组 (7.7) 只有 1 个解,  $c = \bar{U} - \beta/k^2 + l^2$ , 此解是罗斯贝波的波速。因此, 惯性重力波不存在。所以应用地转平衡就可以滤去重力波。

从上面可以看到把地转平衡和静力平衡引进动力方程组, 这样便可滤去声波和重力波而保留气象上最重要的罗斯贝波, 因而使我们的差分时间步长取长, 计算稳定。

## 四、热带波动

在中高纬度地区, 惯性重力波的位相速度要比罗斯贝波的位相速度大得多, 所以容易区别这两种波。然而, 在赤道附近,  $f$  变小, 特别在赤道上,  $f=0$ , 而  $\beta$  又较大, 我们可以从图 7.2 看到, 在图中表示罗斯贝波区域与表示惯性重力波的区域连接起来了, 因此, 可以想象会出现既不能说是惯性重力波, 又不能说是罗斯贝波的情况。

描述在赤道附近所产生的波动还是方程组 (7.7), 但在式中的地转偏向力只能利用赤道平面近似式, 因此, 设  $\bar{u}=0$ , 扰动方程是

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} - \beta y v' = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \beta y u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial t} + gH \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

求解上述方程是很复杂的, 它有三个根,

$$c_{1,2} = \pm c_g \sqrt{1 + \frac{\beta(2n+1)}{c_g k^2}} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (7.13)$$

它表示向东及向西的以快速传播的惯性重力波, 另外一个根是,

$$c_3 = -\frac{\beta}{k^2 + \frac{\beta}{c_g} (2n+1)} \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.14)$$

上两式中  $c_g = \sqrt{gH}$ , (7.14) 式表示向西以缓慢速度传播的罗斯贝波。图 7.4 表示波的频率与波数的关系。因此, 当  $n=0$  时就会出现既是重力波又是罗斯贝波的波动, 这就是罗斯贝—重力混合波。当  $n=0$  时, 我们可以从 (7.10) 方程组的频率方程得到

$$c_{1,2} = c_g \left( \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta}{k^2 c_g}} \right) \quad (7.15)$$

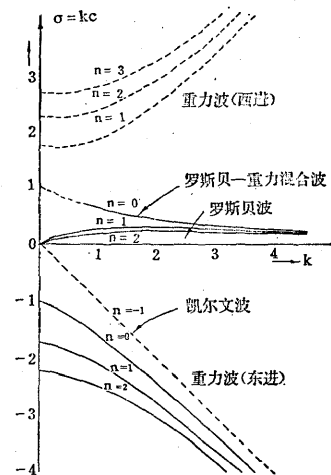


图 7.4 热带波动的波数与频率关系图

从式 7.15 中可以看到  $c_1$  当  $k$  大时, 此波是罗斯贝波; 当  $k$  小时, 此波是重力波, 即罗斯贝—重力混合波。另一个波是向东传播的重力波。

在上述方程中,  $v' \neq 0$ , 若假设  $v' = 0$ , 再由方程组 (7.10) 解得  $c = c_g$ 。这种波没有南北风分量, 而只是向东传播, 这就是凯尔文波。为了与前面所谈的波一致, 用  $n = -1$  来代表。当  $n = 1$  时, 有东进的惯性重力波、西进的惯性重力波及罗斯贝波。如图 7.5A 所示, 除了很靠近赤道的地方, 罗斯贝波的压力场与风场满足地转风关系。绕着低压中心, 在北半球是反时针旋转的流动, 在南半球是顺时针旋转。当  $n = 0$  时, 有东进惯

性重力波, 另一个是西进混合罗斯贝—重力波, 这个波如图 7.5(B) 所示。当  $n = -1$  时, 只有凯尔文波。图 7.5(c) 表示凯尔文波的风场与气压场的关系, 其东西风的风速满足地转风的关系。

热带波动在理论上指出以后, 从观测事实相继证明了在热带对流层上层及平流层下层存在着波长为 10000 公里、速度为 23 米/秒左右的西进罗斯贝—重力混合波, 并且存在着波长为 30000 公里, 波速为 25 米/秒左

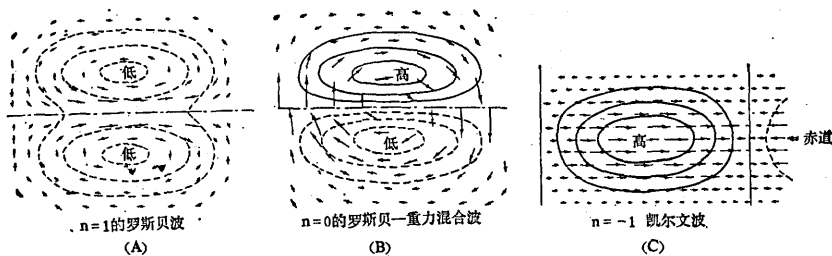


图 7.5 热带波动所产生的气压场与风场的关系

右东进凯尔文波。

### 五、非线性波

上面所讨论的波动都是利用小扰动方法得到的。在这种理论中假设波的振幅是很小的, 把扰动的二次项都略去, 把非线性偏微分方程变成线性方程, 这样所得到的波动都是线性波。然而, 扰动的振幅并不是很小的。近年来, 人们只假设波的振幅是有限的, 这时扰动的平方项就不能忽略, 因此就存在着非线性项。于是, 可得到非线性重力波、非线性惯性重力波及非线性罗斯贝波。上述非线性波的共同特点, 不仅包含了线性波的

特点, 在一定条件下又可以得出孤立波, 并且波的频散公式不仅与波数有关, 而且与波的振幅有关。如由非线性罗斯贝波的频散公式可以看到,  $\beta$  愈小, 波愈宽, 波速愈小。因此像极涡、阻塞高压等系统为什么出现在高纬度地区可以得到某种程度的解释。

### 参考资料

- [1] 小倉義光, 大气动力学原理, 科学出版社, 1981年 (黄荣辉译)。
- [2] 霍尔顿, 动力气象学引论, 科学出版社, 1980年 (南京空军气象学院训练部译)。
- [3] Matsuno, T., J. Meteor. Soc. Japan, 44 (1966), 25—42.