第二讲　大气运动的基本方程组

黄荣辉
（中国科学院大气物理研究所）

动力气象学是一门根据流体力学与热力学的基本定律来研究在地球大气中所发生的各种运动的学科。因此，从流体力学与热力学的基本定律出发，建立适合于地球大气运动特点的方程组，这是动力气象学最基本的内容。

一、大气中基本的作用力

在地球大气中最基本的作用力有万有引力、气压梯度力与摩擦力，还有由于地球自转而产生的地转偏向力与离心力。

1. 地球引力

根据牛顿万有引力定律，单位质量的大气质元受到地球的引力为：

$$g^{*}=\frac{g_0^{*}}{\left(1+\frac{z}{a}\right)^2} \tag{2.1}$$

g_0^*是平均海平面处的引力，a是地球半径（为 6371 公里），z是该大气质元离海平面的高度。对于对流层与平流层的大气质元，$z \ll a$，所以可以认为地球对大气质元的引力与高度无关。

2. 气压梯度力

任何一个大气质元，由于空气分子的杂乱运动，它要受到周围空气分子运动所产生的压力。这个压力在该质元的上下和东南西北各方向都不一样，因而在各个方向上产生了气压梯度力，使得该质元产生运动。单位质量气压梯度力的矢量形式（F_p）是：

$$F_p=-\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{2.2}$$

ρ是空气密度，∇P是气压梯度。这说明气压梯度力与气压梯度成正比，而不是与气压成比例关系。

3. 摩擦力

当大气质元运动时，由于分子粘性，它还要受到其四周空气分子的粘性力，这种力称摩擦力。单位质量摩擦力 F_r 在 x、y、z 方向的分量为：

$E_{rx}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)$，$E_{ry}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)$，$F_{rz}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)$，$\mu$ 为运动粘性系数，u, v, w 是速度的三个分量。若把 μ 看成不随高度变化，引进运动粘性系数 $\nu=\frac{\mu}{\rho}$，于是单位质量的摩擦力的三个分量可写成：

$$F_{rx}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad F_{ry}=\nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\quad F_{rz}=\nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \tag{2.3}$$

一般在接近地表面的边界层内，需要考虑分子粘性作用。一般取 $\nu\approx0.13$ 厘米²/秒。除了接近地表面薄薄一层边界层及 100 公里以上的大气层外，大气中“紊乱”的大大小小的湍流涡动所产生的摩擦力要比分子粘性所产生的摩擦力大得多。因此，把（2.3）式所表示的摩擦力应用于实际大气时，式中的ν 要看成湍流涡动的粘性系数，这种情况，ν 称为涡动粘性系数，一般取为 10^5厘米/秒。

二、地球大气的运动方程式

1. 旋转坐标、地转偏向力与离心力

为了描述空气质点的运动状况，我们必须建立坐标系。因为我们居住在地球上并与其一

起旋转，所以要应用坐标原点固定于地球上的坐标系来描述地球大气的运动。这种坐标系随地球而旋转，故称为旋转坐标系。

假如在一个空间固定的坐标系上来观测该坐标系中一个物体的匀速运动。根据牛顿第一定律，如果此物体不受外力作用，它将一直保持匀速直线运动的状态，因此，这种在空气固定不变的坐标系称为惯性坐标系。然而，地球是旋转的，从惯性坐标系来看地球上任何一个静止的物体，它不是静止的；在地球上作匀速运动的物体，它不是匀速的，而是加速运动，这样就有一个力产生。下面简单阐述一下这个力是如何产生的。

假如在惯性坐标系中看地球上某物体的运动，该物体运动随时间的变化是$\frac{da}{dt}$，地球为一旋转坐标系并以角速度Ω旋转，在这坐标系中所看到的运动的距离**A**。那么，从惯性坐标系看位于旋转坐标系中矢量**A**的时间变化，应该是矢量**A**在旋转坐标系中的时间变化$\frac{dr}{dt}$与由于坐标系以角速度Ω旋转而引起了矢量**A**变化的和，即

$$\frac{d_a\mathbf{A}}{dt}=\frac{d_r\mathbf{A}}{dt}+\Omega\times\mathbf{A} \qquad (2.4)$$

若把**A**看成大气质元的位置矢量$\mathbf{r}$，那么Ω是地球自转角速度（7.292×10^{-5}秒$^{-1}$）。从（2.4）式可以得到惯性坐标系的速度（$\mathbf{v}_a$）与旋转坐标系中速度（$\mathbf{v}_r$）的关系，即

$$\mathbf{v}_a=\mathbf{v}_r+\Omega\times\mathbf{r} \qquad (2.5)$$

这样，在惯性坐标系里的加速度与旋转坐标系中加速度的关系可由（2.5）式与（2.4）式得到：

$$\frac{d_a\mathbf{v}_a}{dt}=\frac{d_r\mathbf{v}_r}{dt}+2\Omega\times\mathbf{v}_r-\Omega^2R \qquad (2.6)$$

上式Ω是地球自转角速度的绝对值（$\Omega=|\Omega|$）。R的方向与地球自转轴成直角，其大小等于离开自转轴的距离。$2\Omega\times\mathbf{v}_r$就是地球偏向加速度，也是单位质量所受的地转偏向力，它对大气运动起着重要作用，其方向与地球自转轴垂直。假设一气块相对于惯性坐标系作匀速运动，如果从转动轴垂直于运动平面的旋转坐标系中来观测，则气块的路径就会出现弯曲（见图2.1），这就是地转偏向力。Ω^2R是离心加速度，也是单位质量所受的离心力，如图2.2所示其方向沿R指向外。公式（2.6）所表示的关系说明了从惯性坐标系所看到的加速度等于从旋转坐标系所看到的加速度与地转偏向加速度、离心加速度之和。

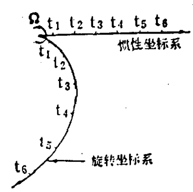

图 2.1　从惯性坐标系与从旋转坐标系观测到的物体运动

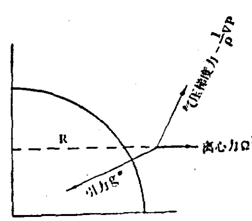

图 2.2　大气质元所受的作用力

2. 大气运动方程

根据牛顿第二定律，在惯性坐标系所看到的大气质元的加速度等于作用于单位质量大气质元上力的总和（图2.2）。

$$\frac{d_a\mathbf{v}_a}{dt}-\frac{1}{\rho}\nabla P+g^*+\mathbf{F}_r \qquad (2.7)$$

这样，在旋转坐标系所观测到的加速度是

$$\frac{d_r\mathbf{v}_r}{dt}=-2\Omega\times\mathbf{v}_r-\frac{1}{\rho}\nabla P+g+\mathbf{F}_r \qquad (2.8)$$

如图2.2所示，重力是地球引力与离心力的合力，即$g=g^*+\Omega^2R$。气象上所用的重力，其方向除极地与赤道外，一般并不指向地球中心，其值一般用45°纬度海平面的重力加速度

值，即 9.806 米/秒^2。

3.球面大气的运动方程式

把所得到的矢量形式的运动方程式应用于实际大气运动时，就要写成分量形式。因地球是球形的，故采用球坐标系来表示分量形式最为合适。如图 2.3 所示，λ 为经度，φ 为纬度，r为离球心的距离。在球坐标中，速度的三个分量（以下都是研究旋转坐标系的速度变化，故略去下标r）是：

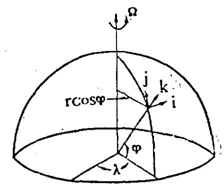

图 2.3　球坐标

$$u = r\cos\varphi\frac{d\lambda}{dt},\qquad v = r\frac{d\varphi}{dt},\qquad w = \frac{dr}{dt},$$

如在球面上各点定义一个直角坐标系（i，j，k）（见图 2.3），其坐标系是随地点不同而不同，则 i、j、k 的方向随 λ、φ、r 的变化而变化。若把（2.8）式中的速度 v 以这个坐标系表示，则得：

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w \tag{2.9}$$

定义 **k** 的方向是垂直于与地球表面相切的平面，与球心方向相反取为正，**i** 位于与地球表面相切的平面里，沿纬度线向东为正。**j** 也位于同一平面，取沿经度线向北为 正。因此，加速度由（2.9）式对时间取微商可得：

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i}\frac{du}{dt} + \mathbf{j}\frac{dv}{dt} + \mathbf{k}\frac{dw}{dt} + u\frac{d\mathbf{i}}{dt} + v\frac{d\mathbf{j}}{dt} + w\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{2.10}$$

$\frac{d\mathbf{i}}{dt}$，$\frac{d\mathbf{j}}{dt}$，$\frac{d\mathbf{k}}{dt}$ 为曲率项，随 λ、φ、r 不同而不同。从上式可以知道，在球面坐标系中，加速度等于在球面上所观测到的加速度与由于地球曲率所引起曲率项之和。由图 2.3 所示的球坐标与直角坐标系的关系，可以得到下式：

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \frac{u\,\mathrm{tg}\varphi}{r}\mathbf{j} - \frac{u}{r}\mathbf{k}\\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= -\frac{u\,\mathrm{tg}\varphi}{r}\mathbf{i} - \frac{v}{r}\mathbf{k}\\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \frac{u}{r}\mathbf{i} + \frac{v}{r}\mathbf{j}\end{aligned} \tag{2.11}$$

上式即为球坐标系中加速度的分量形式。

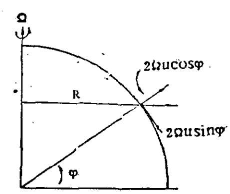

图 2.4　地转偏向力的分量

为了得到运动方程的分量形式还必须把地转偏向力写成分量形式。把地球自转角速度投影到 i、j、k 坐标系（见图 2.4），在 i 方向 $\Omega_x = 0$，j 方向 $\Omega_j = \Omega\cos\varphi$，k方向 $\Omega_k = \Omega\sin\varphi$。地转偏向力的三个分量：

$$-2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} = -(2\Omega w\cos\varphi - 2\Omega v\sin\varphi)\mathbf{i} - 2\Omega u\sin\varphi\mathbf{j} + 2\Omega u\cos\varphi\mathbf{k} \tag{2.12}$$

由（2.8）、（2.10）与（2.11）、（2.12）式可以得到球坐标系中三个分量的运动方程式：

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{du}{dt} - \frac{uv\,\mathrm{tg}\varphi}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v\sin\varphi - 2\Omega w\cos\varphi + F_x\\ &\frac{dv}{dt} + \frac{u^2\mathrm{tg}\varphi}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u\sin\varphi + F_y\\ &\frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u\cos\varphi + F_z\end{aligned}\right. \tag{2.13}$$

式中 $\partial x = a\cos\varphi\partial\lambda$，$\partial y = a\partial\varphi$，从上式可以看出某一分量的加速度与曲率项之和是与该坐标分量的气压梯度力、地转偏向力与摩擦力相平衡。方程（2.13）是最一般的运动方程式，它能

够描述从近地面层附近到全球大气环流的各种各样的运动。

三、运动方程式的简化

1.尺度分析理论

大气的运动是复杂的，它包含着各种空间尺度与时间尺度的运动（表2.1）。因此，针对所研究的对象的各种特征尺度，对运动方程式中各项进行数量级估计，若忽略某些不损害物理本质的小项，又使得方程式大大简化，这种方法一般称尺度分析方法。利用尺度分析方法必须考虑如下三点：①所研究的对象中其物理量的大小；②在该现象中物理量变动的振幅；③其现象的特征时间尺度与特征的空间尺度。

表2.1　　　　大气运动的水平尺度与时间尺度

运动种类	超长波	长　波	高、低压	台　风	积　云	大气边界层小尺度运动	湍　流
水平尺度	10^4公里	10^3—10^4公里	10^3公里	10^2公里	1—10公里	100米—1公里	1厘米—100米
时间尺度	2周	几天	2—3天	2—3天	几小时	几小时	几分钟

2.大尺度运动的水平运动方程的简化

根据最常见的天气系统——移动性长波槽脊的水平特征尺度L（10^8厘米），特征水平速度U（10^3厘米/秒），特征高度H（10^6厘米），特征垂直速度W（1厘米/秒），特征时间尺度T（10^5秒），扰动的气压变化（10毫巴），地转偏向参数$f=2\Omega\sin\varphi$（10^{-1}秒$^{-1}$），ρ（10^{-3}克/厘米^3），大气的涡动粘性系数ν（10^5厘米^2/秒）等代入方程（2.13）的水平运动方程中各项进行运算，在x分量式中$2\Omega w\cos\varphi$，$\frac{uw}{a}$，$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$是小项，可以略去。y分量式中$\frac{vw}{a}$，$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial^2 z}$是小项可以略去。因此，描写水平波长从1000公里到数千公里的长波运动时，水平运动方程可简化成下式：

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}-\dfrac{uv}{a}\mathrm{tg}\varphi-fv=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{u^2}{a}\mathrm{tg}\varphi+fu=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}\end{cases}\tag{2.14}$$

3.大尺度运动的垂直运动方程的简化

对于垂直运动方程也可以应用上述所规定的特征尺度进行类似的尺度分析。由于从地面到对流层顶气压约降低1个量级，因此，垂直气压梯度的尺度可取为P_0/H，P_0为地面气压。把各特征尺度代入到方程(2.13)的垂直运动方程中，则$\frac{dw}{dt}$、$2\Omega u\cos\varphi$、$\frac{u^2+v^2}{a}$、$\nu\frac{\partial^2 w}{\partial^2 z}$均可以忽略不计，气压梯度力与重力占绝对优势，这就是说气压场是高精度地处于静力平衡，即任意点的气压仅仅等于该点的单位横截面积上气柱的重量。因此，垂直运动方程就简化成静力平衡公式，即

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-g\tag{2.15}$$

同样，也可对积云运动这样小的尺度现象进行相似的尺度分析，从而得出一组适合于小尺度的运动方程组。此外，我们还可以利用加速度的特征尺度与地转偏向力的特征尺度的比值，即罗斯贝数$R_o=U/fL$来进行严格的尺度分析，建立最适合于各种现象的运动方程式。

四、连续方程

前面介绍了根据牛顿第二定律建立的大气运动方程。因为垂直运动随时间的变化要比垂

直方向的气压梯度力或重力小 7 个量级。故天气系统的垂直运动不能由垂直运动方程来求得。但垂直运动对天气预报也是一个重要的物理量，因此，利用质量守恒原理把垂直运动与水平运动联系起来，这样就可以从水平运动来估计垂直运动。根据质量守恒原理，大气中一定容积V的气块，其质量随时间是不变的，但是，由四周空气流入此气块或由气块向四周空气流出都会引起该气块的密度或者体积的变化。由密度所引起的质量变化 $V\frac{d\rho}{dt}$ 与体积所引起的质量变化 $\rho\frac{dV}{dt}$ 之和为零。散度是容积对于原来容积的单位时间增大率，即 $\nabla\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$，则可导出下式：

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\cdot\nabla\mathbf{v}=0 \tag{2.16}$$

从上式可以看出，若气块的空气向外辐散，气块密度就要减小；若气块四周的空气向气块里辐合，气块的密度就要增加。假定空气为不可压缩，即 $d\rho/dt=0$，这样可得到 $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$，Z坐标下不可压缩的连续方程为：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2.17}$$

把垂直运动与水平运动联系了起来。

状态方程及热力学方程（详细内容以后章节中讲）如下：

$$P=\rho RT \tag{2.18}$$

$$c_v\frac{dT}{dt}-\frac{P}{\rho}\ \frac{d\rho}{dt}=Q \tag{2.19}$$

由式（2.13）、（2.14）、（2.17）、（2.18）、（2.19）组成了大气运动基本方程组。

五、P坐标系的大气运动基本方程组

在高空气象观测中，气温与湿度等要素是作为气压的函数来测定的。并且高空天气图是在等压面上进行分析的，因此，必须把Z坐标的方程组变换到P坐标系。

1.P坐标的运动方程

等高面上某一点的气压值与等压面上高度值是一一对应的。在等压面上往往应用重力位势 ϕ 来表示高度，它等于等压面上高度值乘上重力加速度。这样，在Z坐标的静力学平衡公式可以变成下式：

$$\frac{\partial}{\partial p}\ (gz)=\frac{\partial\phi}{\partial p}=-\frac{1}{\rho} \tag{2.20}$$

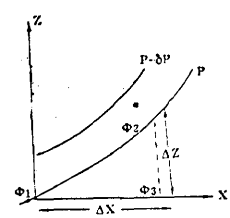

图 2.5　P坐标系与Z坐标系的关系

如图 2.5 所示，等压面与等高面并不一致，所以一个物理量沿等压面上的水平变化应等于这个物理量沿等高面的水平变化与由于等压面在等高面的倾斜所产生的变化之和。经过这些坐标变换，最后得到P坐标的水平运动方程：

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)_P+\left(v\frac{\partial}{\partial y}\right)_P+\omega\frac{\partial}{\partial p} \tag{2.20'}$$

上式就是用 $\omega\frac{\partial}{\partial p}$ 来代替 Z 坐标上 $w\frac{\partial}{\partial z}$，并且把气压梯度力变成等压面的位势沿等压面的水平变化。

2.ω与w之间的关系

ω 是 P 坐标的垂直运动，而 w 是Z坐标的垂直运动，根据上面两个坐标系的变换关系，

$$\omega = -\rho g w + \rho g\left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_P + u\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P + v\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P\right] \approx -\rho g w \qquad (2.21)$$

$\omega<0$ 表示上升运动，$\omega>0$ 表示下沉运动，通常在大尺度系统中 ω 约 10^{-3}毫巴/秒，相当于 w 约 1 厘米/秒。

3. P坐标的连续方程

P坐标的连续方程是：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \qquad (2.22)$$

式中密度的个别微商不出现，这就是P坐标的主要优点。因此，大尺度运动一般采用 P 坐标较合适。

4. P坐标的热力学方程

把 Z 坐标的热力学方程应用状态方程（2.18）与P坐标的静力学公式就可以得到 P 坐标的热力学方程。在P坐标上的基本方程组为：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \dfrac{uv}{a}\operatorname{tg}\varphi - fv = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{u^2}{a}\operatorname{tg}\varphi + fu = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial p} = -\dfrac{1}{\rho} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \\ P = \rho R T \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial p}\right) + S\omega = Q \end{cases} \qquad (2.23)$$

S 是静力稳定度。（2.23）式一般称原始方程组，它不仅是动力气象学中最基本的方程组，也是数值天气预报与大气环流中最常用的方程组。

利用P坐标的运动方程组描述对流层及平流层低层的大气运动有其优越性，但描述平流层上层及中层大气的运动是不太合适的。因为本来在 Z 坐标系中，垂直距离是很大的，而变成 P 坐标，由于高度高，P值很小，这样在用数值解法时，其垂直差分的间隔就变得很小，从而使得波解产生歪曲，所以一般描写高层大气的运动，还是采用 Z 坐标。

另外，在数值天气预报中，由于地形的缘故，有些等压面的天气图上某些区域就变成了空白区，故往往用σ坐标代替P坐标，$\sigma = \dfrac{P}{P_s}$或$\sigma = \dfrac{P-P_t}{P_s-P_t}$，$P_s$是地面气压，$P_t$是某一固定气压值，如取模式顶的气压，在 P_s 处，$\sigma = 1$，也即表示地表面，这样容易引入下边界条件。

我们可以利用所得到的基本方程组来讨论各种天气系统的演变及大气中一些主要动力过程，并且随着计算数学及电子计算机的发展，预报这些天气系统的演变过程会愈来愈精确。近年来利用大气环流模式来模拟大气中各种各样的动力过程也日益发展。

参 考 资 料

〔1〕曾庆存，数值天气预报的数学物理基础，科学出版社，1979。
〔2〕小倉义光，大气动力学原理，科学出版社，黄荣辉译，1981。
〔3〕霍尔顿，动力气象学原理，科学出版社，中国人民解放军空军气象学院译，1980。
〔4〕栗原宜夫，大気力学入門，岩波全書，1978。