

# 物理量计算中差分近似误差对量值的影响

肖永生

(安徽省气象科学研究所)

目前，我国不少台站都已把物理量计算运用到诊断分析和实际天气预报业务中，并取得了一定的成绩。但在工作实践中，有时也会碰到一些似乎难以解释的现象。例如，在某网格点上， $\omega$ 的计算值是正值 ( $\omega > 0$ )，为下沉运动，但在此区域中却有强烈的降水发生。本文从中尺度系统差分近似的误差讨论入手，试图解释上述现象，并对物理量计算提出一点不成熟的意见。

## 一、物理量计算中的差分近似

众所周知，实际的气象要素场包含了从声波到超长波的各种尺度的波动，因此，我们总可以把某一气象要素  $F(x)$  写成若干个谐波相叠加的形式：

$$F(x) = \sum_{i=1}^N a_i \sin\left(\frac{2\pi}{L_i}x + \delta_i\right) \quad (1)$$

这里  $L_i$  为第  $i$  个波的波长， $\delta_i$  为其位相角， $a_i$  为其振幅， $N$  为谐波数。

考察某一谐波  $f_i(x) = a_i \sin\left(\frac{2\pi}{L_i}x + \delta_i\right) = f(x)$

(以下均略去下标  $i$ )，它的一阶微分为：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_i \frac{2\pi}{L_i} \cos\left(\frac{2\pi}{L_i}x + \delta_i\right) \quad (2)$$

记  $(\partial f / \partial x)_n$  为  $f(x)$  的一阶差分，则中心差分形式为：

$$\begin{aligned} (\frac{\partial f}{\partial x})_n &= a_i \frac{2\pi}{L_i} \cos\left(\frac{2\pi}{L_i}x + \delta_i\right) \times \\ &\quad \sin\frac{2\pi}{L_i}d / \frac{2\pi}{L_i}d \end{aligned} \quad (3)$$

这里  $d$  为差分网格距。若用  $(\frac{\partial f}{\partial x})_n / \frac{\partial f}{\partial x}$  表示差分对微分的逼近程度，则有：

$$(\frac{\partial f}{\partial x})_n / \frac{\partial f}{\partial x} = \sin\frac{2\pi d}{L_i} / \frac{2\pi d}{L_i} \quad (4)$$

差分对微分逼近的相对误差为：

$$\begin{aligned} E_R &= \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_n - \frac{\partial f}{\partial x} \right] / \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \left( \sin\frac{2\pi d}{L_i} / \frac{2\pi d}{L_i} \right) - 1 \end{aligned} \quad (5)$$

不少人曾讨论过  $(\frac{\partial f}{\partial x})_n / \frac{\partial f}{\partial x}$  在  $L \geq 2d$  时的

分布，指出，差分近似总是低估了微分值，并设计了另一些改进方案[1][2][3]，但都未考虑  $L < 2d$  的情况。对数值预报而言，当逐次对初始场进行反复平滑运算以后，次网格尺度系统终将被过滤或抑制。但一般用于诊断分析的仅是运算的一次值，它不存在反复过滤的问题，因而次网格尺度系统对于物理量的差分计算值将会有相当大的影响。我们着重对  $L < 2d$  的情况作了一些讨论。

## 二、中尺度系统活动对差分计算值的影响

令  $2\pi d/L = \alpha$ ，我们求取函数  $E_R = E_R(\alpha) = (\sin\alpha/\alpha) - 1$  在区间  $\alpha(0, \infty)$  上的极值，即令  $dE_R/d\alpha = 0$ ，则极值点方程为：

$$\tan\alpha - \alpha = 0 \quad (6)$$

由(6)式可知，函数  $E_R(\alpha)$  在  $\alpha(0, \infty)$  上有无数极值点，但在  $[\pi, 3\pi/2]$  区间内有一最小值。用迭代法求解此极值点得： $\alpha_{min} \approx 4.4934$ ，代入得：

$$(L/d)_{min} \approx 1.398 \quad (7)$$

$$(E_R)_{min} \approx 121.7\% \quad (8)$$

此时对应的  $\left( (\frac{\partial f}{\partial x})_n / \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{min} \approx -0.217$ 。

由(7)、(8)式可见，差分格式对于波长近于一倍半格距的波，有着最大的相对误差(-121.7%)。差分计算值的绝对值为微分真值的  $1/5$  左右。特别要指出的是其位相和微分真值相差  $180^\circ$ ，两者符号相反，因此，差分格式对这种波长的波的计算误差是不可低估的。

从图象上直观地看，函数在某点的一阶微分实际上是在某点的切线斜率  $\tan\alpha$ ，差分法是用弦

线代替了切线(图1),对于图1中的正弦波,当差分格距在半波长以内,即 $2d < L$ 时,弦线的斜率 $\tan \beta_1$ ,总是和 $\tan \alpha$ 同号的(因为 $\alpha$ 和 $\beta_1$ 同号),但其绝对值偏小,即 $|\tan \beta_1| < |\tan \alpha|$ 。显见当 $d \rightarrow 0$ 亦即 $d \ll L$ 时,弦线和切线无限接近, $\tan \beta_1 \rightarrow \tan \alpha$ ,差分近似程度越高。而当 $L < 2d < 2L$ 时, $\alpha$ 和 $\beta_2$ 反号,因此 $\tan \beta_2$ 和 $\tan \alpha$ 符号相反,这时,差分对微分的相对误差达100%以上,还可以见到,当 $d \approx L/1.4$ 时, $\tan \beta$ 和 $\tan \alpha$ 差异最大。

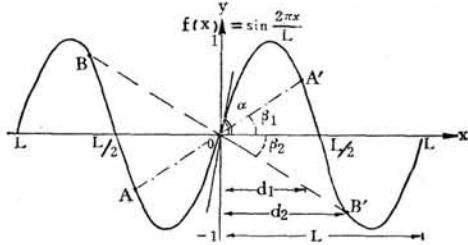


图1 差分误差和格距d的关系示意图

考虑到通常用于物理量计算的网格距 $d$ 在100—300公里左右,从上述分析可见,差分近似对于波长 $L \approx 1.4d$ 的140—420公里的波有着最大的畸变。值得注意的是,这个最大畸变波长出现于中尺度波段。量纲分析指出,中尺度系统的 $D$ 、 $\omega$ 等物理量的量级比天气尺度这些同类型的大一个量级,即有:

$$O(D_m) = 10' O(D_s) \quad (9)$$

这里 $D_m$ 、 $D_s$ 分别代表中尺度和天气尺度系统的辐散值。则

$$O(\partial f / \partial x_s)_m \approx -2 \times 10^{-1} O(\partial f / \partial x)_m \quad (10)$$

由(9)、(10)式可见

$$O(D_m)_s = O(D_s) \quad (11)$$

上式说明,差分近似对 $L \approx 1.4d$ 的中尺度系统 $\omega$ 、 $D$ 等物理量所造成的歪曲,可以达到天气尺度系统这些物理量的同等量级。在某些点上,这种“歪曲值”甚至有可能大于天气尺度该物理量的值,从而造成虚假的物理量场的分布,给诊断分析和实际业务工作造成困难。现举一数值例子说明之。

设一平直的低空西南急流轴线上叠加有一天气尺度和一中尺度的波状扰动(图2),令 $x$ 轴指向东北,则有:

$$u(x) = u_0 + u_m \sin\left(\frac{2\pi x}{L_m} + \pi\right) + u_s \sin\left(\frac{2\pi x}{L_s} + \pi\right) \quad (12)$$

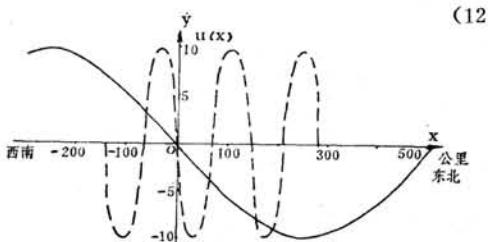


图2  $u$  的波动分量示意图  
虚线表示中尺度波动  $L_m = 140$  公里  
实线表示天气尺度波动  $L_s = 1000$  公里

风场在 $x = 0$ 处的散度值为:

$$D \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -u_m \frac{2\pi}{L_m} - u_s \frac{2\pi}{L_s} \equiv D_m + D_s \quad (13)$$

对于典型的中尺度和天气尺度系统的物理量量级,取 $u_m = u_s = 10$ 米/秒。 $L_m = 140$ 公里 $= 1.4 \times 10^5$ 米, $L_s = 1000$ 公里 $= 10^6$ 米。则有 $D_m = -4.49 \times 10^{-4}$ 秒 $^{-1}$ , $D_s = -6.28 \times 10^{-5}$ 秒 $^{-1}$ , $D = -5.12 \times 10^{-4}$ 秒 $^{-1}$ 。结果说明,在 $x = 0$ 点处,中尺度系统和天气尺度系统都存在着辐合,且 $D_m$ 比 $D_s$ 大一个量级,但两者的总效果仍是辐合的。若取中心差分,计算同一点( $x = 0$ )的散度值,则有:

$$D_a \Big|_{x=0} = (D_m)_a + (D_s)_a \quad (14)$$

上式 $(D_m)_a$ 、 $(D_s)_a$ 分别为中尺度系统和天气尺度系统散度的差分计算值。若差分网格取 $d = L_m/1.4 = 100$ 公里,则有 $(D_m)_a = D_m \times (-0.217) = 9.74 \times 10^{-5}$ 秒 $^{-1}$ , $(D_s)_a = D_s \times (0.935) = -5.87 \times 10^{-5}$ 秒 $^{-1}$ , $D_a = 3.87 \times 10^{-5}$ 秒 $^{-1}$ 。由上可见,在 $x = 0$ 点散度的差分计算值,对于中尺度系统,它是正的,为辐散,其量级和天气尺度系统的散度相同,而绝对值更大,因此,差分计算的该点的总散度为正。

比较 $D_m$ 与 $D$ 和 $(D_m)_a$ 与 $D_a$ 还可以看出,由于差分对于中尺度系统微分值的畸变,不仅中尺度系统的散度计算值和真值反号,总的散度值也由辐合变成了辐散,这种“歪曲”的散度量级可达天气尺度的散度量级。因此,用差分近似逼近微分值,对某些中尺度系统有着相当大的误差,这个误差有时会强烈干扰甚至掩盖天气尺度系统的物理量值,从而造成在强烈辐合上升运动的地区(如暴雨区), $D$ 的计算值却为正的这种矛盾的现象。因此,至少可以这样说,差分近似误差是造成这种不合理现象的重要原因之一。

### 三、实例

在对安徽69·7洪水进行分析发现,这次降水过程中有许多中系统活动,波长在90—150公里。为了计算 $D_s = \partial v / \partial y$ ,我们点绘了1969年7月14日14时沿116.5°E(大别山东侧中尺度涡旋源地)的地面 $v$ 分量剖面图(图3)。由图可见, $v$ 分量沿南北向呈波状分布,在望江和寿县之间存在着波长约为120公里的中尺度扰动,它叠加在天气尺度背景流场一致的偏南风上( $\bar{v}$ 约为5米/秒),在潜山—岳西之间为一较强的中尺度 $v$ 分量辐合区(这里正是降水强度最大的地区),

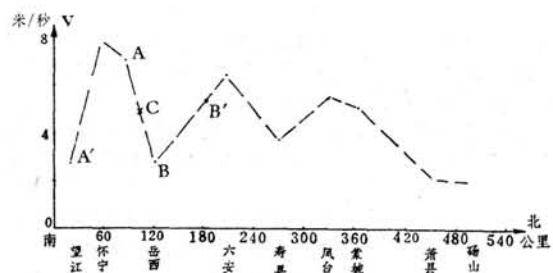


图3 1969年7月14日14时地面 $v$ 分量南北剖面图

计算该区域的中点 c 上的散度，取网格步长  $d = 20$  公里，亦即取  $d = L/6$ ，则有：

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_c \approx (u_B - u_A) / H_B = -1.1 \times 10^{-4} \text{ 秒}^{-1} \quad (15)$$

虽然取  $d = L/6$  用差分代替微分有  $<20\%$  的误差（附表），但粗略地看，可以认为它代表了该区域的散度值。由(15)式可见， $O(D_y) = 10^{-4}$ ，为典型的中尺度系统散度量级，并且是辐合的。但若取计算网格距

$d' = L/1.4$ ，即  $d' = 80$  公里，则有：

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_c \approx 1.6 \times 10^{-5} \text{ 秒}^{-1} \quad (16)$$

即  $O(D_y) = 10^{-5}$ ，为典型的天气尺度系统的散度量级，且是辐散的。这个实例计算结果和上述理论分析及数值例子颇为一致。由于资料限制，没有计算纬向  $u$  分量的情况。

附表  $\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_s / \frac{\partial f}{\partial x}$  在三种差分格式里随  $d/L$  的分布

格 式	$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_s / \frac{\partial f}{\partial x}$	$d/L$									
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
一阶中心差分格式	1.00	0.94	0.76	0.51	0.23	0.00	-0.16	-0.22	-0.19	-0.10	0.00
四 阶 格 式	1.00	1.00	0.93	0.72	0.38	0.00	-0.25	-0.31	-0.23	-0.11	0.00
伍 氏 格 式	1.00	1.01	0.99	0.79	0.42	0.00	-0.28	-0.34	-0.25	-0.11	0.00

#### 四、其他差分格式的误差情况

为了提高差分格式的精度，有人设计了另外一些差分格式。这里仅讨论四阶精度差分格式（简称四阶格式）和伍荣生提出的格式〔3〕（简称伍氏格式）。

四阶格式：

$$\left. \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{s4} \right|_j = \frac{4}{3} \left( \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2d} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4d} \right) \quad (17)$$

伍氏格式：

$$\begin{aligned} \left. \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{s5} \right|_j &= 1.438 \left( \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2d} \right) - \\ &- 0.438 \left( \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4d} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

将(17)、(18)式统一写成：

$$\begin{aligned} \left. \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{sk} \right|_j &= B_k \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2d} + \\ &+ A_k \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4d} \quad (k = 4, 5) \end{aligned} \quad (19)$$

这里，当  $B_4 = 4/3$ ,  $A_4 = -1/3$  时为四阶格式；当  $B_5 = 1.438$ ,  $A_5 = -0.438$  时为伍氏格式。上述两种格式和一阶中心差分格式的主要不同点在于，这两种格式在进行差分运算时，不仅考虑了相邻的一倍格距点上的函数值，而且考虑了两倍格距点上的函数值。实际上，当仅用一倍格距点计算中心差分时，差分可写为  $(\partial f / \partial x)_{sB} = f_{j+1} - f_{j-1} / 2d$ ；当仅用二倍格距点计算中心差分时，差分又可写为  $(\partial f / \partial x)_{sA} = f_{j+2} - f_{j-2} / 4d$ 。四阶格式和伍氏格式可以看作是这两种差分计算值的某种加权平均，即

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_s = B \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{sB} + A \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{sA} \quad (20)$$

(20)式和(19)式相比较，可见  $B_k$  和  $A_k$  分别是加权系数。这两种格式通过选取“最佳”加权系数  $B$ 、 $A$ ，从而企图使差分的截断误差有所减小。重复第一节中的讨论可得：

$$E_R = B \left( \sin \frac{2\pi d}{L} / \frac{2\pi d}{L} \right) + A \left( \sin \frac{4\pi d}{L} / \frac{4\pi d}{L} \right) - 1 \quad (21)$$

按(5)和(21)式，我们分别计算了在不同的  $d/L$  下，一阶中心差分格式、四阶格式、伍氏格式的  $(\partial f / \partial x)_s / \partial f / \partial x$  的分布（见附表），从表中可以看到，对于  $d/L \leq 0.2$ （即  $L \geq 5d$ ）的波动，四阶格式和伍氏格式比一阶中心差分格式的差分近似精度有了很大的提高。但是，必须指出的是，它们同时也使  $0.5 < d/L < 1.0$ （即波长在  $d < L < 2d$  之间）的波动差分误差增大了。例如：当  $d/L = 0.7$  ( $L \approx 1.43d$ ) 时，一阶中心差分的近似误差  $(\partial f / \partial x)_s / \partial f / \partial x$  为  $22\%$ ，而四阶格式和伍氏格式分别为  $31\%$  和  $34\%$ 。误差增大了  $10\%$ ，

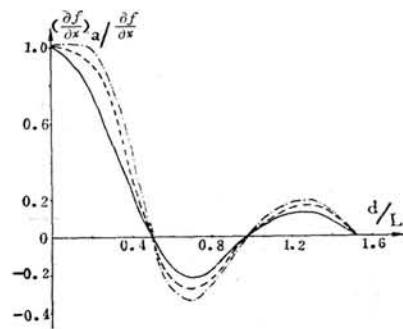


图 4 一阶中心差分格式（实线）四阶格式（虚线）和伍氏格式（点划线）误差曲线

也就是说，后两种格式对于中尺度系统微分值的描述有着更大的歪曲。由于中尺度系统某些物理量的量级（如 $D$ 、 $\omega$ ）比天气尺度系统大一个量级，因而，这增大的10%的误差本身就能够达到天气尺度物理量的量级。所以，用四阶格式和伍氏格式对物理量进行差分运算，其对中尺度系统的计算误差更易干扰天气尺度场的物理量分布，尽管它们当 $L \gg d$ 时误差较小。总之，在中尺度系统强烈活动的地区，四阶格式和伍氏格式对较长波差分近似精度的改善，远不足以抵偿其对中尺度系统计算误差的增大。三种差分格式的误差曲线见图4。

## 五、结 论

1. 差分近似对微分真值的逼近程度仅为波长 $L \gg d$ 时才是较为精确的。一般说来，当 $L \geq 2d$ 时，差分计算值和微分值的位相是相同的，仅数值偏小。而当 $d < L < 2d$ 时，差分值和微分值的位相相反，特别是当 $L$ 近于一倍半格距时，差分近似有着最大的相对误差（-120%以上）。对于常用于业务工作和诊断分析的网格距 $d = 100—300$ 公里而言，畸变最大的波长出现在中尺度。由于这个误差的存在，可能会强烈地干扰天气尺度场的物理量分布，而目前使用的几种差分

格式，均不能消除或减小这一误差。

2. 由于暴雨常和频繁的中尺度天气系统活动相联系，因此，在有强降水的地区，用目前通常采用的网格距计算物理量场，所得到的 $D$ 、 $\omega$ 及其他一些物理量，并不一定总能真实地反映该地的物理量值。在某些场合，它既不能反映该地的中尺度系统的物理量值，又不能反映天气尺度系统的物理量值。它仅仅是一个被严重歪曲了的计算值，这一点，在诊断分析和日常业务工作中必须特别注意。

3. 从数值例子和实例计算中可以看出，在资料比较稠密的情况下，用差分法计算物理量值以较小的网格距为宜，尽量利用现有的或可能搜集到的资料，这样，才有可能较为真实地反映该地的物理量值，提高诊断分析和业务工作的质量。

## 参 考 资 料

1. G. J. Haltiner, *Numerical Weather prediction*, 1971.
2. Ph D. Thompson, *Numerical Weather analysis and prediction*, 1961.
3. 伍荣生，《大气科学》，120—129页，3（2），1979。